PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 2 | 15. Januar 1940 | 41. Jahrgang

Redaktionsschluß für Nr. 4 am 1. Februar 1940

INHALT:

Abhandlungen:

O. Petersen, Entwicklung einer optischen Methode zur Messung von Ultraschallabsorptionen in Gasen und Flüssigkeiten. S. 29.

E. David, Theorie der optischen Ultraschallabsorptionsmessung. S. 37.

H. Schlechtweg, Zum Permalloy-Problem. S. 42.

G. Szivessy und W. Herzog, Über die Bracesche Halbschattenmethode. S. 43.

F. Matossi, Bemerkungen zur Analogie der Schrödingerschen Differentialgleichung mit einer Wellengleichung. S. 47.

Besprechungen:

L. Bieberbach, Carl Friedrich Gauß, ein deutsches Gelehrtenleben. S. 52.

Nachrichten. S. 52.

ABHANDLUNGEN

Entwicklung einer optischen Methode zur Messung von Ultraschallabsorptionen in Gasen und Flüssigkeiten

Von Otto Petersen

Im Verlaufe der im hiesigen Institut angestellten Ultraschalluntersuchungen, die in erster Linie auf optischem Wege geführt waren, ergab sich für diese Arbeit die Zielsetzung, die Erscheinung der Lichtbeugung an Ultraschallwellen zur Entwicklung einer neuen Methode der Schallabsorptionsmessung auszuwerten. Bildet man das Schallfeld mit Hilfe des gebeugten Lichtes ab, so kann man unter Berücksichtigung noch zu erläuternder Versuchsbedingungen aus der mit wachsender Entfernung von der Schallquelle abnehmenden relativen Helligkeit des Schallfeldbildes Schlüsse auf die Schallenergieabnahme und damit auf die Absorption des Schalles ziehen. Untersuchungen flüssiger Medien führten auf diese Weise ohne große experimentelle Schwierigkeiten zum Ziel[1]). Im Fall gasförmiger Medien jedoch zeigte sich außer der auch in Flüssigkeiten beobachteten Winkelabhängigkeit der absoluten Helligkeit des Schallfeldbildes eine sich mit dem Winkel zwischen Schallwellen und einfallenden Lichtstrahlen ändernde relative Helligkeitsabnahme. Unter Zugrundelegung dieser Beobachtungen ergab sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen in jedem Falle aus der relativen Helligkeitsabnahme auf die Absorption geschlossen werden kann.

Zur Beantwortung wurde zunächst die theoretische Intensitätsformel[1]) herangezogen. Sie besagt, daß unter der Voraussetzung eines scharf begrenzten Schallfeldes homogener ebener Wellen geringer Energie Licht nur in die ersten Ordnungen gebeugt wird und die Intensität des gebeugten Lichtes proportional der Schallenergie ist. Der Braggsche Einfallswinkel des Lichtstrahls bestimmt für jede erste Ordnung ein Intensitätsmaximum, dem sich zu beiden Seiten, d. h. positiver und negativer Einfallswinkel weitere, durch die Begrenzung des Schallfeldes festgelegte, weniger intensive und mit wachsenden Winkeln gegen Null strebende Maxima anschließen.

Also: Bei ebenen, homogenen Schallwellen geringer Energie besteht für jeden Winkel Proportionalität zwischen Schallenergie und Intensität des gebeugten Lichtes. Lediglich der Proportionalitätsfaktor ändert sich mit dem Winkel. In diesem Falle ist daher, unabhängig von der Stellung des Schallfeldes, der Abfall der Intensität des gebeugten Lichtes, d. h. die Helligkeitsabnahme des Schallfeldbildes in Fortpflanzungsrichtung der Schallwellen, das Maß der durch die Absorption bewirkten Schallenergieabnahme.

Es bietet nun keinerlei Schwierigkeiten, Schallfelder geringer Energie zu erzeugen; doch ist es in keinem Falle gelungen, Schallquellen herzustellen, die ebene, homogene Wellen aussenden. Dennoch wurden in Flüssigkeiten nach optischen Methoden Absorptionsmessungen vollführt, deren Resultate sich als winkelunab-

1) Absorption von Ultraschall in Flüssigkeiten: H. Grobe, Physik. Zeitschr. **39**, 335, 1938.

1) Zum Beispiel E. David, Physik. Zeitschr. **38**, 590, 1937.

hängig erwiesen[1][2]). Dieser Sachverhalt entspricht dem Ergebnis der theoretischen Behandlung der Lichtbeugung an realen Schallfeldern[3]).

Bei Untersuchungen der Schallfelder in Gasen konnte jedoch aus dem Intensitätsabfall des gebeugten Lichtes nicht auf die Absorption geschlossen werden. Es kam z. B. vor, wenn das Schallfeld in bestimmten Winkeln außerhalb des Braggschen zur Lichtrichtung justiert war, daß in größerer Entfernung von der Schallquelle mehr Licht gebeugt wurde als in ihrer Nähe. Eine Erklärung dieses Widerspruchs ergab sich aus Untersuchungen der Winkelabhängigkeit der Intensität des gebeugten Lichtes; und zwar wurde mit Hilfe einer noch zu beschreibenden Anordnung festgestellt, daß sich die Schallwellen mit wachsender Entfernung von der Schallquelle verformen, d. h. daß sich der durch die Schallabsorption bewirkten Helligkeitsabnahme ein Effekt überlagert, der von der Verformung der Welle herrührt.

Es wurde nunmehr versucht, die Ursache dieser Wellenverformung zu ergründen. Dabei zeigte sich, daß eine durch die Schwingungen der Schallquelle erzeugte Strömung die Verformung der Welle bewirkt. Da es schwierig schien, diese Störungen vollends zu beseitigen, also gänzlich winkelunabhängige Resultate bei Absorptionsmessungen zu erzielen, wurde schließlich ein experimenteller Kunstgriff angewandt, um die Störungen unschädlich zu machen. Er bestand darin, daß das Schallfeld während der photographischen Aufnahme innerhalb eines bestimmten Winkels gedreht wurde. Dabei integriert die Photoplatte über das bei den einzelnen Winkelstellungen abgebeugte Licht. Das Ergebnis des exponentiellen Abfalls der aus den Schwärzungen solcher Aufnahmen ermittelten Intensitäten deutete auf die Richtigkeit der Methode hin. Sie wird gestärkt durch die theoretischen Untersuchungen von David, nach denen die Integration der Intensitäten des von einer Schallwelle in den einzelnen Winkelstellungen gebeugten Lichtes einer Integration über die Gesamtenergie der Welle entspricht. Diese Gesamtenergie fällt aber auch bei etwas gestörter Ausbreitung dem Absorptionskoeffizienten entsprechend exponentiell ab.

Übersicht

1. Untersuchungen über Form und Ausbreitung der Schallwellen.
   a) Vorbemerkung.
   b) Versuchsanordnung zur Messung der Winkelabhängigkeit der Intensität des gebeugten Lichtes.
   c) Meßergebnisse.
   d) Vergleich mit der Theorie.
   e) Untersuchung der Störungen der Schallausbreitung, Versuche zu deren Beseitigung.
2. Messung von Schallabsorption nach einer optischen Integrationsmethode.
   a) Die Meßanordnung.
   b) Aussagen über die Richtigkeit der Methode (Fehlerquellen).

1) H. Grobe, a. a. O.

2) Untersuchungen von A. Lindberg, noch nicht veröffentlicht.

3) E. David, Physik. Zeitschr. **41**, 37, 1940.

1. Untersuchungen über Form und Ausbreitung der Schallwellen

a) Vorbemerkung

Wie bereits einleitend erwähnt, hatte sich bei Voruntersuchungen herausgestellt, daß Absorptionsmessungen in Gasen (durch Bestimmung des Intensitätsabfalls von Schallfeldaufnahmen bei fester Winkelstellung) im Gegensatz zu den Ergebnissen bei Untersuchungen in Flüssigkeiten winkelabhängige Resultate zeigten. Es war daher die erste Aufgabe, die Beugungserscheinungen an sich, die Abhängigkeit der Intensität des gebeugten Lichtes vom Winkel zwischen Licht- und Schallfortpflanzungsrichtung zu untersuchen und durch Vergleich der sich ergebenden Intensitätskurven mit der Theorie Schlüsse auf die Form und Ausbreitung der Schallwellen zu ziehen. Das Prinzip der Untersuchungen sei mit Hilfe von Fig. 1 erläutert:

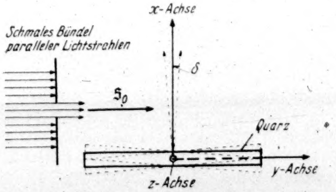


Fig. 1. Versuchsanordnung (schematisch).

Mittels eines in x-Richtung (Fortpflanzungsrichtung des Schalles) schmalen Bündels paralleler Lichtstrahlen wurde ein scheibenförmiges Volumen des Schallfeldes beleuchtet, und durch Drehen des Quarzes um die vertikale z-Achse bei fester Lichteinfallsrichtung $\mathfrak{S}_0$ die sich mit dem Winkel δ zwischen Quarznormale und x-Achse ändernde Intensität des gebeugten Lichtes gemessen[1]).

1) Daß bei Drehung andere Teile des Schallfeldes in das beleuchtete Volumen gelangen, ist ohne Belang, da die linearen Verschiebungen minimal sind.

b) Versuchsanordnung zur Messung der Winkelabhängigkeit der Intensität des gebeugten Lichtes

Das Schallfeld wurde mit Hilfe einer Quarzscheibe für Ultraschallzwecke erzeugt, indem diese als Steuerquarz eines Huth-Kühn-Senders geschaltet, zu Schwingungen ihrer Grundfrequenz 4,28 MHz angeregt wurde. Die beiden durch Kathodenzerstäubung vergoldeten Quarzoberflächen befanden sich in innigem Kontakt mit zwei plangeschliffenen Bronzegußplatten. In die eine der Platten war zur Abstrahlung des Schalles eine rechteckige Öffnung geschnitten. Beide Platten wurden mittels Schraubenzug fest und gleichmäßig gegen den Quarz gedrückt. Durch diese Halterung war eine gute Konstanz der Schwingungen gewährleistet. Bei sämtlichen Untersuchungen war der Quarz in dieser Halterung in eine Gasdruckkammer so eingebaut, daß sich die Schallwellen in horizontaler Richtung ausbreiteten. Mittels eines Drehtischchens mit seitlich verschiebbarem Aufsatz, auf den die Druckkammer montiert war, konnte diese und damit das Schallfeld um die vertikale Achse gedreht und in horizontaler Ebene in x-Richtung bewegt werden. Die Druckkammer bestand aus einem Stück Mannesmannrohr, das zu beiden Seiten durch eingepaßte Flansche verschlossen wurde. In die Flansche waren Fenster aus Interferenzglas eingesetzt. Oben am Rohr befanden sich zwei Stutzen zum Füllen und Leeren der Kammer sowie isoliert eingesetzte Durchführungen für die Zuleitungen vom Sender.

Die optische Anordnung zeigt Fig. 2. Das Licht einer Wolframbogenlampe Wl wurde über die Kondensorlinse L_1 durch ein Grünfilter F auf den Spalt Sp konzentriert. Das aus dem Spalt austretende Licht durch L_2 parallel gemacht und durch eine Blende, Bl_1 eingeengt, durchsetzte die Druckkammer Dk und damit ein bestimmtes scheibenförmiges Volumen des Schallfeldes. In der Brennebene von L_3 entstanden dann die Beugungsbilder (bei großen Schallintensitäten bis zu mehreren Ordnungen) neben dem direkten Bild des Spaltes. Mittels einer Linse L_4 wurde schließlich das durch die Blende Bl_2 hindurchtretende Licht einer ersten Ordnung auf eine Photoplatte P konzentriert.

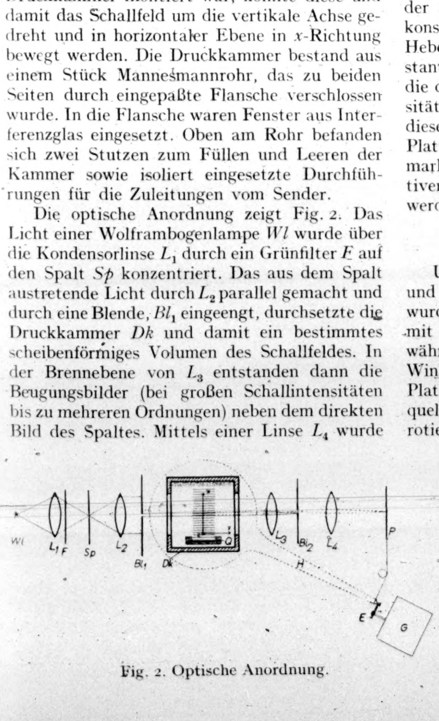


Fig. 2. Optische Anordnung.

Zur selbsttätigen Registrierung des Intensitätsverlaufs der ersten Ordnung bei Veränderung des Winkels zwischen einfallenden Lichtstrahlen und Schallwellenfronten war eine Vorrichtung getroffen, die ebenfalls mit Hilfe von Fig. 2 erläutert sei: An der die Druckkammer tragenden, drehbaren Platte war ein etwa 1 m langer Hebelarm H befestigt. Mit diesem wurde ein seitlich leicht verschiebbarer Schlitten gekoppelt, auf dem die Photoplatte P gehaltert war. Durch Hin- und Herschwenken des Hebelarms wurde also die Druckkammer innerhalb eines bestimmten Winkels gedreht und die Photoplatte gleichermaßen senkrecht zur Lichtrichtung seitlich verschoben. Das Schwenken geschah mittels einer als Führung dienenden, sich mit konstanter Geschwindigkeit drehenden, herzförmigen Exzenterscheibe E (angetrieben durch einen gleichmäßig laufenden Nebenschlußmotor und ein Untersetzungsgetriebe G). Die Berandungskurve der Scheibe E war durch die Forderung einer konstanten Schwenkungsgeschwindigkeit des Hebelarms bestimmt. Wegen der ebenfalls konstanten Geschwindigkeit der Photoplatte werden die den einzelnen Winkeln zugehörenden Intensitäten mit gleicher Belichtungszeit auf die diesen Winkeln entsprechenden Stellen der Platte belichtet. Mit Hilfe von Intensitätsmarken konnten dann die winkelabhängigen relativen Intensitäten des gebeugten Lichts ermittelt werden.

c) Meßergebnisse

Um auswertbare Schwärzungen zu erzielen, und Intermittenzeffekte möglichst zu vermeiden, wurde eine Gesamtbelichtungszeit von 5 Minuten mit 20 Drehperioden gewählt; d. h. es wurde während dieser Belichtungszeit der vorgegebene Winkelbereich 40mal überstrichen. Auf dieselbe Platte wurden unter Anwendung gleicher Lichtquelle und Gesamtbelichtungszeit mittels eines rotierenden Sektors Intensitätsmarken gedruckt, um die mit Hilfe des Koch-Goosschen Mikrophotometers ermittelten Schwärzungen der Registrieraufnahmen in Intensitäten umwerten zu können.

Der sich ergebende Intensitätsverlauf bei Winkeländerung ist in Form einer graphischen Darstellung aus Fig. 3 ersichtlich. Da es lediglich auf relative Intensitäten ankam, wurde für den Braggschen Winkel willkürlich $J_1 = 100$ festgesetzt und unter Benutzung dieses Wertes die theoretische Kurve für ebene, homogene

Schallwellen und die experimentelle Kurve, die Korff nach einer umständlicheren Methode fand[1]), zum Vergleich eingezeichnet.

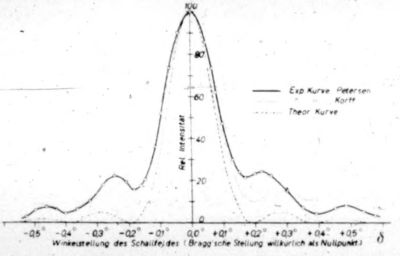


Fig. 3. Winkelabhängigkeit der Intensität des in eine 1. Ordnung gebeugten Lichtes. (Ausdehnung des Schallfeldes in y-Richtung: 2,4 cm; die Korffsche Kurve wurde auf diese Länge des Lichtweges im Schallfeld reduziert.)

Man erkennt, abgesehen von einem Unterschied zwischen den beiden experimentellen Kurven, die beide unter Benutzung desselben Quarzes jedoch bei verschiedener Quarzhalterung gefunden wurden (Einfluß der Halterung auf die Schwingungsform), daß die experimentell ermittelten Intensitäten in allen Winkeln außerhalb des Braggschen größer sind, als die für ebene und homogene Wellen errechneten, daß aber das Braggsche Maximum gut ausgeprägt bleibt. Daraus ist auf Grund der theoretischen Erwägungen der Schluß zu ziehen, daß zwar die meiste Schallenergie in Richtung der Quarznormalen abgestrahlt wird, wohl aber von der Normalen abweichende Strahlungsrichtungen vorkommen; wobei jedoch die Schallenergie, die in außernormale Richtungen gestrahlt wird, mit wachsenden Winkeln rasch abnimmt.

Die experimentelle Intensitätskurve (Fig. 3) wurde ja durch Beugung des Lichts an Schall-

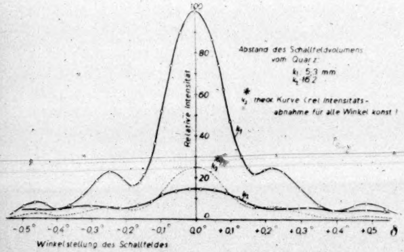


Fig. 4. Intensitätskurven für zwei Schallfeldvolumina mit verschiedenem Abstand vom Quarz.

1) W. Korff, Physik. Zeitschr. **37**, 717, 1936.

wellen in einem scheibenförmigen Schallfeldvolumen gewonnen. Verschiebt man nun das Schallfeld entgegengesetzt der Schallrichtung, so daß ein entsprechendes Volumen in größerem Abstand vom Quarz zur Beobachtung gelangt, so ist theoretisch zu erwarten (siehe unten), daß die Form der Intensitätskurve erhalten bleibt, lediglich die Ordinaten gemäß der Schallabsorption abnehmen. Dieser Erwartung entspricht nun das experimentelle Ergebnis nicht (Fig. 4).

Das Braggsche Maximum ist verbreitert, die folgenden Extrema treten nur noch schwach in Erscheinung, und ihre Abszissen sind verschoben. Der Quotient der Intensitäten (die relative Intensitätsabnahme) ist winkelabhängig.

d) Vergleich mit der Theorie

Nehmen wir nun das Resultat der Davidschen theoretischen Überlegungen[1]) für die folgenden Betrachtungen zu Hilfe. Das mit einer festen Richtung $\mathfrak{S}_0$ ins Schallfeld eindringende Licht (Fig. 5) wird um einen Winkel λ/Λ gebeugt (λ und Λ bedeuten Licht- bzw. Schallwellenlänge). D. h. die möglichen Abbeugungsrichtungen bilden um die ungebeugte Nullrichtung herum einen spitzen Kegel mit dem Öffnungswinkel $2 \cdot \lambda/\Lambda$.

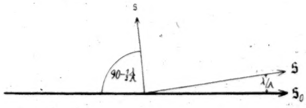


Fig. 5. Beziehung zwischen Schall- und Lichtrichtung.

Nach der Theorie ist die Intensität des in eine bestimmte Richtung $\mathfrak{S}$ gebeugten Lichtes der Intensität der in Richtung $\mathfrak{s}$ laufenden Partialwelle des Schallfeldes proportional. Der Proportionalitätsfaktor ist von den akustischen und optischen Konstanten sowie der Schall- und Lichtwellenlänge abhängig, also im Einzelfalle konstant.

Bei fester Winkelstellung des Schallfeldes relativ zur Richtung $\mathfrak{S}_0$ des einfallenden Lichtes (d. h. festem δ in Fig. 1) kommen also von sämtlichen räumlich divergierenden Schallrichtungen nur solche für die Lichtbeugung in Betracht, die mit der Lichteinfallsrichtung den Winkel $90 - \frac{1}{2}\lambda/\Lambda$[2]) bilden (Braggsche Winkelstellung der betreffenden Schallrichtung). Sie liegen auf einem sehr flachen Kegel, praktisch in einer vertikalen Ebene. Man kann diese Richtungen

1) E. David, a. a. O.

2) Beziehungsweise $90 + \frac{1}{2}\lambda/\Lambda$ für die andere 1. Ordnung.

dadurch sichtbar machen, daß man den Spalt Sp (Fig. 2) durch eine enge Lochblende ersetzt. Fig. 6 zeigt eine bei fester Winkelstellung gemachte Aufnahme einer solchen Beugungsfigur, bei der durch enge Ausblendung der Schallwellen in z-Richtung für besonders starke Divergenz gesorgt wurde.

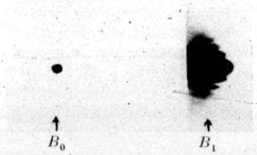


Fig. 6. Lichtbeugung an stark divergierenden Schallwellen. B_0: o. Ordnung, B_1: Beugungsspektrum 1. Ordnung (das Licht war ungefiltert).

Es ist ersichtlich, daß bei Ausblendung durch Spalte, deren Länge groß gegen die Ausdehnung der Beugungsfigur in z-Richtung ist, über die Intensitäten der Beugungsfigur, d. h. über die Intensitäten der vertikal divergierenden Partialwellen des Schallfeldes integriert wird. Die Intensität der mit der Anordnung nach Fig. 2 bei fester Winkelstellung δ erhaltenen strichförmigen Beugungsfigur ist also dem Integral über die bei diesem δ in Bragg-Stellung befindlichen Partialwellen proportional.

Die Intensitätskurven (Fig. 3 und 4), die bei Drehung des Schallfeldes erhalten werden, sind getreue Bilder der Schallenergieverteilung über die in horizontaler Ebene divergierenden Strahlungsrichtungen, wobei jeweils über die vertikal divergierenden (gleichzeitig in Bragg-Stellung befindlichen) Richtungen integriert ist.

Die Schallenergieverteilung über die Richtungen bleibt für verschiedene Abstände vom Quarz theoretisch trotz Absorption erhalten; d. h. die Form der Intensitätskurve muß unverändert bleiben, lediglich die Ordinaten sollten gemäß der Absorption im gleichen Verhältnis abnehmen. Das experimentelle Ergebnis (Fig. 4) zeigt aber eine Formänderung der Intensitätskurve. Nach obigem muß daher geschlossen werden, daß die Schallenergieverteilung über die Richtungen bei Fortpflanzung der Welle sich ändert, die Welle also in ihrer Ausbreitung gestört wird.

e) Untersuchung der Störungen der Schallausbreitung, Versuche zu deren Beseitigung

Bei visueller Beobachtung des Schallfeldes im Lichte einer ersten Ordnung konnte festgestellt werden, daß die Struktur des Schallfeldbildes sich kurzzeitlich und unregelmäßig änderte. Es war zu erkennen, daß die „Schallstrahlen" (nicht ganz zutreffende Bezeichnung für die Schallinterferenzstreifen, Fig. 9) dauernd in ihrer Helligkeit schwankten, und zwar trotz Konstanz des Senders und damit der Quarzschwingungen. Bei großen Schallintensitäten war sogar zu erkennen, daß in größerer Entfernung von der Schallquelle an einer Stelle beobachtete Streifen verschwanden, an anderer Stelle neue auftraten. Dieser Effekt, der in Außer-Braggschen Winkelstellungen[1]) am deutlichsten zu erkennen war, konnte durch Verringerung der Schallenergie (Vergrößerung des Heizwiderstandes im Sender) auf ein Mindestmaß herabgedrückt, jedoch nicht vollständig abgestellt werden. Er wurde jedoch gesteigert, wenn in der Druckkammer Strömungen erzeugt wurden (Ein- und Ausströmenlassen des Gases), ja, es gelang auf diese Weise, das Bild des Schallfeldes vollständig zu zerstören. In gleicher Weise konnte (bei geöffneter Kammer) das Schallfeld mit einem „Fön" in einiger Entfernung vom Quarz „weggeblasen" werden. Auf Grund dieser Beobachtungen wurde der Schluß gezogen, daß in den vom schwingenden Quarz erzeugten Strömungen, dem sog. „Quarzwind", die Ursache der Schallwellenverformung zu erblicken sei. Er wirkt sich in Gasen wegen der großen Strömungsgeschwindigkeit in stärkerem Maße aus als in Flüssigkeiten, in denen wegen der größeren Schallgeschwindigkeit und der auf Grund innerer Reibung viel geringeren Strömungsgeschwindigkeit das Verhältnis zwischen beiden um Größenordnungen höher liegt. Durch die Strömung wird also in Gasen die Welle mitgeführt und dadurch mit wachsender Entfernung von der Schallquelle mehr und mehr verformt[2]). Das heißt aber, daß mit der Ausbreitung des Schalles Richtungsänderungen eintreten, und damit bei irgend vorgegebenen Winkelstellungen des Schallfeldes ein Teil der Schallenergie „aus dem Gesichtsfeld herausläuft". Das bedeutet, daß der Absorptionskoeffizient in Braggscher Winkelstellung des Schallfeldes zu groß, in Außer-Braggschen Stellungen zu klein ausfällt.

Zur Beseitigung des Quarzwindes wurden zwei Versuche unternommen:

1. Der Quarz wurde in einen der direkten Beobachtung zugänglichen Glaskasten gestellt, in diesen Rauch eingeblasen und eine Strömung

1) Mit Braggscher Winkelstellung des Schallfeldes ist immer die Braggsche Winkelstellung der zur Quarzoberfläche parallelen Hauptschallwellenfronten relativ zur Lichtrichtung gemeint.

2) Um in 2 cm Entfernung vom Quarz eine Verschiebung der Schallwelle um $\Lambda/2$ zu bewirken, genügt z. B. eine Strömungsgeschwindigkeit $v_{Str.} \approx 0{,}7$ m/sec. Schallgeschwindigkeit für Stickstoff: $v_{Sch.} \approx 370$ m/sec. $\Lambda = 0{,}088$ mm.

großer Geschwindigkeit festgestellt[1]). Diese blieb jedoch dann vollständig aus, wenn vor den Quarz eine Stoffgaze gespannt war. Trotzdem konnte bei Beobachtung des Schallfeldes noch eine Verformung der Schallwellen erkannt werden (Winkelabhängigkeit des Intensitätsabfalls, geringe Helligkeitsschwankungen der Schallstrahlen).

2. Es wurde eine „Strömungsfalle" (aus Glas) konstruiert und, wie Fig. 7 zeigt, am Quarz angebracht. Dadurch sollte einmal die Strömung gestaut, zum anderen eine Ausbildung von differentiellen Strömungen, die von ungleichmäßiger Energieverteilung im Schallfeld verursacht werden könnte, durch Reibung an den Wänden erschwert werden. Ein wesentlicher Erfolg in der erwarteten Richtung war nicht zu verkennen; dennoch blieb eine geringe Verformung der Schallwellen bestehen (visuell beobachtet).

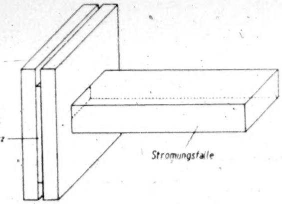


Fig. 7. Strömungsfalle.

2. Messung von Schallabsorption nach einer optischen Integrationsmethode

a) Versuchsanordnung

Wir sind nunmehr in der Lage, auf Grund der bisher gewonnenen Resultate eine Methode der Ultraschallabsorptionsmessung in Gasen (und Flüssigkeiten) anzugeben. Da nämlich die durch scheibenförmige Volumina V_x[2]) hindurchlaufende Gesamtschallenergie mit wachsendem x entsprechend der Absorption exponentiell abnimmt, aber durch Verformung der Welle die Richtungsverteilung der Schallenergie sich ändert, ist das Ziel, durch eine optische Integrationsmethode für jedes einzelne V_x die Gesamtenergie zu ermitteln. Nach den Ausführungen bei Fig. 6 stellt für jedes Schallfeldvolumen V_x die Intensitätskurve ein Bild der Schallenergieverteilung über alle Strahlungsrichtungen dar. Also bedeutet Integration über die Intensitätskurve eine Integration über die Energie sämtlicher Strahlungsrichtungen, d. h. über die durch das betreffende Volumen hindurchlaufende Gesamtschallenergie. Aus der Abnahme der Integrale für Schallfeldvolumina mit wachsendem Abstand x vom Quarz erhält man den richtigen Absorptionskoeffizienten α. Durch eine solche Integrationsmethode wird der Einfluß einer Schallwellenverformung auf die Lichtbeugungserscheinung eliminiert, vorausgesetzt, daß die Änderung der Schallrichtung innerhalb eines räumlichen Winkels verläuft, der kleiner oder höchstens gleich dem Maximalwinkel δ ist, um den das Schallfeld gedreht wird.

In der endgültigen Meßanordnung wollen wir nicht für die einzelnen V_x getrennt messen, son-

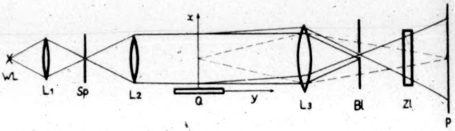


Fig. 8a. Optik der endgültigen Meßanordnung, Grundriß.

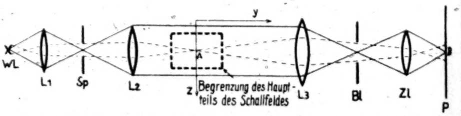


Fig. 8b. Optik der endgültigen Meßanordnung, Aufriß.

dern wir fordern: Die Optik unserer Meßanordnung soll für die verschiedenen V_x die Beugungsordnung einerseits (d. h. in z-Richtung) genau so abbilden, wie es die Anordnung nach Fig. 2 tat. Andererseits soll sie die Beugungsordnungen für die verschiedenen V_x nebeneinander abbilden. Das bedeutet im *lim* bei unendlich feiner Unterteilung in Volumina V_x, daß die x-Richtung des Schallfeldes abgebildet werden soll. Diese in den beiden Koordinatenrichtungen verschiedenartige Abbildung läßt sich durch Ersetzen der Linse L_3 durch eine Zylinderlinse erreichen. Die so entstehende endgültige Meßanordnung[1]) zeigt Fig. 8. Wie aus Fig. 8a hervorgeht, bildet die Linse L_3 die x-Richtung des Schallfeldes auf die feststehende Photoplatte P ab, wobei die Zylinderlinse optisch unwirksam ist. Da das zur Verwendung kommende Licht die Beugungsordnung in der Blende Bl passiert, geschieht die Abbildung durch sehr spitze

1) Strömungsgeschwindigkeit größenordnungsmäßig wie die auf S. 33 errechnete.

2) Der Index soll den in x-Richtung veränderlichen Abstand des Volumens vom Quarz charakterisieren.

1) Verfasser benutzte ursprünglich an Stelle des Systems L_3, Zl nur eine einzelne Zylinderlinse mit der brechenden Kante in z-Richtung. Die hier geschilderte Optik, die lichtstärker und theoretisch übersichtlicher ist, wurde von A. Lindberg vorgeschlagen.

Büschel; sie ist also überaus tiefenscharf. In z-Richtung entwirft die Linse L_3 (vgl. Fig. 8b) wie früher die Beugungsordnung in der Blende Bl; die Zylinderlinse bildet sie unverändert wieder auf die Platte ab.

Dreht man den Quarz um die z-Achse, so durchläuft für jedes x die Intensität des Beugungslichtes eine Kurve entsprechend Fig. 4. Gesucht sind die Integrale über diese Kurven. Wir erhalten die Integrale aber, wenn wir einfach während der Aufnahme den Quarz mit konstanter Winkelgeschwindigkeit hin- und herdrehen. Die Photoplatte summiert dann, wenigstens in sehr guter Näherung, zeitlich über die Intensitäten. Da die so ermittelte Gesamtintensität für jedes x der Gesamtenergie des Schallfeldes proportional ist, erhält man also unter Berücksichtigung des Vergrößerungsverhältnisses aus dem Intensitätsabfall auf der Photoplatte unmittelbar den Schallabsorptionskoeffizienten.

Falls die Fortpflanzung der Schallwellen genügend ungestört erfolgt, wie es z. B. bei Flüssigkeiten in der Regel der Fall ist[1]), wird die Intensitätskurve nach Fig. 4 bei wachsendem Abstand vom Quarz für alle Winkelstellungen im gleichen Verhältnis absinken. Dann können wir uns das Integrieren sparen, d. h. die Meßanordnung nach Fig. 8 mit feststehendem Quarz benutzen. Wir messen so an Stelle des Abfalles der Gesamtenergie des Schallfeldes den damit gleichen Abfall der Energie der gerade in Braggscher Stellung befindlichen Partialwellen.

Man kann die Wirkung der optischen Anordnung nach Fig. 8 auch auf folgende Weise plausibel machen: In x-Richtung erfolgt die sehr tiefenscharfe Abbildung, die verständlicherweise die in Bragg-Stellung befindlichen Partialwellen scharf aussondert. In z-Richtung gelangt an jeden Punkt der Platte P, der überhaupt Licht erhält, Licht, das im ganzen Querschnitt des Schallfeldes abgebeugt worden ist. Als Beispiel ist in Fig. 8b die Begrenzung des nach Punkt B gehenden Lichtstrahlenbüschels gezeichnet. Das in irgendeinem Punkt des Schallfeldes, z. B. Punkt A, gebeugte Licht verteilt sich andererseits in z-Richtung über den ganzen beleuchteten Streifen der Platte. Es wird so plausibel, daß die in z-Richtung gleichmäßige Intensität auf der Platte einem Integral über die Energie des ganzen Schallfeldquerschnitts entspricht, und zwar wegen der Aussonderung in x-Richtung über die Energie der in Bragg-Stellung befindlichen Partialwellen.

Damit ist also nun das Ziel, eine Methode der Messung von Ultraschallabsorption in Gasen und Flüssigkeiten zu entwickeln, erreicht. Es seien noch einige Bemerkungen über die Struktur der beobachteten Schallfelder hinzugefügt.

1) A. Lindberg, Physik. Zeitschr. (erscheint demnächst). Auf diesen Fall beziehen sich auch die theoretischen Ausführungen von E. David, a. a. O., die aber ohne weiteres auf die Drehmethode übertragen werden können.

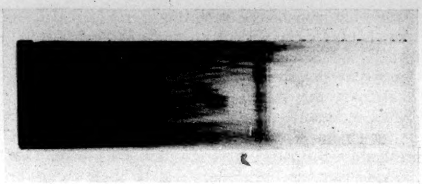


Fig. 9. Aufnahme des Schallfeldes mit Struktur.

Bei Fortlassen der Zylinderlinse Zl (Fig. 8) wird das Schallfeld im Lichte der ersten Ordnung scharf abgebildet. Man erhält ein Bild, wie

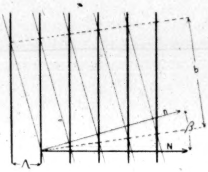


Fig. 10. Interferenz zwischen zwei Wellenzügen. N: Normale der Hauptwelle, n: Normale der Nebenwelle, b: Abstand zweier Interferenzlinien.

es z. B. Fig. 9 zeigt. Zur Erklärung der Struktur dieses Schallfeldbildes sei auf Fig. 10 verwiesen: Treten zwei Wellenzüge, die einen Winkel β einschließen, miteinander in Interferenz, so verlaufen die Interferenzlinien längs der Winkelhalbierenden; und es besteht zwischen dem Abstand b zweier Interferenzlinien, dem Winkel $\beta/2$ zwischen Hauptfortpflanzungsrichtung des Schallfeldes und Interferenzlinien und der Schallwellenlänge Λ die Beziehung:

$$\Lambda = 2b \cdot \sin \frac{\beta}{2}.$$

Indem es nun gelang, die Gültigkeit dieser Relation nachzuweisen (Λ aus den elektrischen Daten des quarzgesteuerten Senders, b und $\beta/2$ durch Ausmessen des Schallfeldbildes Fig. 9 unter Berücksichtigung des Abbildungsverhältnisses), scheint der Beweis erbracht, daß das Bild als Projektion eines von Interferenzlinien durchzogenen Schallfeldes auf eine senkrecht zur Lichtrichtung stehende Ebene aufzufassen ist. Außerdem zeigte sich, indem wiederum der Spalt Sp durch eine enge Lochblende ersetzt wurde (vgl. bei Fig. 6), daß durch Abschirmen des von außerhorizontalen Schallrichtungen gebeugten Lichtes die Streifen verschwanden, und zwar zunächst diejenigen großer Winkel und schließlich mit zunehmender Verengerung der Blende auch solche geringer Neigung.

Es hat nun bei Betrachtung der Fig. 9 den Anschein, als ob in ziemlich große Winkel noch erhebliche Schallenergie gestrahlt wird. Doch kann man sich durch eine intensitätsmäßige Abschätzung der in größere Winkel gestrahlten Schallenergie überzeugen, daß beispielsweise die unter einem Winkel von $\pm 5^\circ$ außernormal abgestrahlte Teilenergie als klein gegen die Gesamtenergie zu vernachlässigen ist. Durch Umwertung der Schwärzungsmaxima und -minima in relative Intensitäten ergab sich bei Messung längs einer Interferenzlinie, die gegen die Normale mit einem Winkel $\frac{\beta}{2} \approx 2 \cdot 5^\circ$ verläuft: $\frac{I_{max}}{I_{min}} \approx 1{,}13$.

Nun gilt aber, falls A die Amplitude eines Hauptwellenzuges (der annähernd in x-Richtung laufen möge) bedeutet, und a die kleine Amplitude des mit A interferierenden Teilwellenzuges darstellt:

$$\frac{I_{max}}{I_{min}} = \frac{(A+a)^2}{(A-a)^2} \approx 1 + 4 \cdot \frac{a}{A}.$$

Daraus ergibt sich dann bei dem gemessenen Intensitätsverhältnis $I_{max} : I_{min} = 1{,}13$

$$\frac{a^2}{A^2} = \frac{i}{I} \approx \frac{1}{1000}$$

Das heißt, i ist klein gegen I trotz der ausgeprägten Streifung.

b) Aussagen über die Richtigkeit der Methode (Fehlerquellen)

Es sollen nun noch einige Fehlerquellen erörtert werden, die unter Umständen geeignet sind, das Resultat (den Absorptionskoeffizienten) systematisch zu verfälschen. Sie seien der Reihe nach aufgeklärt:

1. Zu kleiner Drehwinkel δ: Aus der Intensitätskurve (Fig. 3) ist abzulesen, daß Schallenergie, die in größere Winkel als $\pm 0{,}5^\circ$ außernormal abgestrahlt wird, bereits klein ist gegen die Gesamtenergie. Hingegen erweist sich eine Integration über diesen Winkelbereich als unzureichend, da durch Verformung der Welle eine Richtungsänderung eintritt, die über diesen Winkel hinausgeht (vgl. Fig. 4). Das heißt es würde bei Drehung des Schallfeldes um $\delta = 1^\circ$ in diesem Falle der Absorptionskoeffizient α zu groß ausfallen. Der Drehwinkel δ ist von der im Schallfeld auftretenden Strömung abhängig. Er muß vor den jeweiligen Schallfeldaufnahmen durch Ermittlung der Intensitätskurven (Fig. 4) bestimmt, erst dann bei unveränderter Apparatur die Drehaufnahme des Schallfeldes vorgenommen werden.
2. Die Abbildung mittels Zylinderlinse bedeutet ja eine Projektion aller innerhalb vertikaler Ebenen divergierenden Schallrichtungen auf Richtungen in der x, y-Ebene (die ihrerseits durch Drehung des Schallfeldes nacheinander in eine lichtbeugende Stellung, Braggsche Stellung, gelangen). Das heißt, es geht in die bezüglich des Absorptionskoeffizienten auszuwertende Schallfeldaufnahme für die divergierenden Schallrichtungen die Projektion des vom Schall zurückgelegten Weges, also der Kosinus des Divergenzwinkels, ein. Am Schluß des vorigen Abschnitts ergab sich jedoch, daß Schallenergie, die unter einem Winkel von $\pm 5^\circ$ außernormal abgestrahlt wird, bereits sehr klein gegen die Gesamtenergie ist. Kosinusse von Winkeln bis zu 5° sind aber praktisch noch $= 1$.
3. Ein weiterer methodisch bedingter Fehler könnte dadurch auftreten, daß bei Verwendung der „Strömungsfalle" ein Teil der Schallenergie durch Reibung an den Wänden vernichtet wird und dadurch der zu messende Absorptionskoeffizient (in Richtung zu größeren Werten hin) verfälscht wird. Hier wird es darauf ankommen, die Einflüsse dieser möglichen Fehlerquelle durch experimentelle Variationen zu ermitteln. Im Verlaufe dieser Arbeit wurden in dieser Richtung keine Untersuchungen angestellt.
4. Bei geringen Gasdrucken macht sich das an Staubteilchen und geringsten Unebenheiten der Linsen gestreute Licht störend bemerkbar, das auch durch sorgfältigstes Putzen der im optischen Strahlengang befindlichen Glaskörper nicht beseitigt werden kann. Es ist daher für die Untersuchungen in Gasen bezüglich der Gasdrucke eine untere Grenze festgelegt (Vergrößerung der Schallenergie führt zum Zerspringen der Quarze), die bei etwa 1 Atm. liegen dürfte.
5. Zur Umwertung der Schwärzungen der Schallfeldaufnahmen in relative Intensitäten werden Intensitätsmarken benötigt, die unter vollkommen gleichen Bedingungen wie die auszuwertende Aufnahme auf die gleiche Platte belichtet sein sollten. Das ist bei Drehaufnahmen nicht möglich, da zeitlich schwankende Intensitäten auf die Platte belichtet werden, es aber darauf ankommt, die Zeitsumme der Intensitäten zu ermitteln. Man muß Drehfrequenz, Gesamtbelichtungszeit und eventuell Plattensorte so wählen, daß keine Intermittenzeffekte auftreten.
6. Auf die Fehler bei sehr hohen Absorptionskoeffizienten, die sich nachträglich theoretisch ergeben haben, wurde experimentell nicht eingegangen. Deswegen sei in diesem Punkte nur auf die nachfolgenden theoretischen Ausführungen hingewiesen.

Hamburg, Physikalisches Staatsinstitut.

(Eingegangen 4. Dezember 1939)

Theorie der optischen Ultraschallabsorptionsmessung

Von Erwin David

Der optischen Ultraschallabsorptionsmessung, besonders ihrer theoretischen Behandlung, bereitete bisher die in allen realen Schallfeldern vorhandene sog. Schallfeldstruktur große Schwierigkeiten. Im folgenden wird gezeigt, wie sich diese Schwierigkeiten überwinden lassen.

Die Rechnung bezieht sich auf die von O. Petersen[1]) entwickelte Anordnung. Sie verläuft etwa so: Wir greifen das durch einen bestimmten Punkt des ersten Ausblendespalts hindurchtretende Licht einer bestimmten Wellenlänge λ heraus. Diese Spezialisierung wird am Schluß durch eine triviale Summation über die Intensitäten des von verschiedenen Punkten herrührenden Lichts verschiedener Wellenlänge wieder aufgehoben. In das im x, y, z-System (vgl. Fig. 1) laufende Schallfeld mit der Schallwellenlänge Λ tritt also paralleles, monochromatisches Licht ein[2]). Die Hauptfortpflanzungsrichtung des Schallfeldes liege in der Nähe der x-Richtung; das Licht falle ein mit dem Richtungsvektor $\mathfrak{S}_0$, der in der x, y-Ebene liegt, und mit der y-Achse den kleinen Winkel $\gamma = \lambda/\Lambda$ bildet (genau $2 \sin \frac{1}{2} \gamma = \lambda/\Lambda$). Im Idealfall würde in der Brennebene der Linse, der ξ, ζ-Ebene, eine erste Beugungsordnung als Punkt an der Stelle $\xi = \zeta = 0$ erscheinen. Tatsächlich entsteht eine Beugungsfigur mit einer gewissen Ausdehnung.

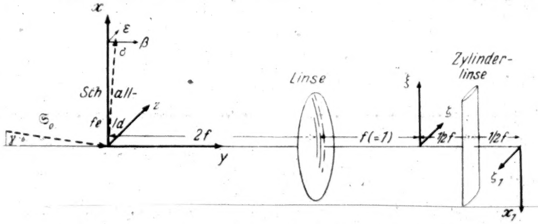


Fig. 1. Schema der Anordnung und Koordinatensysteme. x, y, z = System, in dem das Schallfeld läuft. σ = Richtungsvektor für Schallwellenfortpflanzung. ε, β = Komponenten von σ, $\mathfrak{S}_0$ = Richtungsvektor des einfallenden Lichtes. ξ, ζ = Ebene, in der die Beugungsordnung ausgeblendet wird. x_1, ζ_1 = Ebene, in der das „Bild" des Schallfeldes entsteht. f = Brennweite der Linse, wird als Einheit verwendet; Brennweite der Zylinderlinse = $\frac{1}{4}f$.

Diese Beugungsfigur wird als erster Schritt unserer Rechnung nach der von Debye angegebenen Methode[1]) ganz allgemein berechnet.

Während die Zylinderlinse die ζ-Richtung der Beugungsfigur auf die ζ_1-Richtung wieder abbildet, ist sie in der dazu senkrechten Richtung optisch unwirksam. Durch Interferenz entsteht aus der ξ-Richtung der Beugungsfigur auf der x_1-Achse eine strichartige Figur (zweiter Abschnitt der Rechnung), deren Intensitätsabfall in x_1-Richtung den Intensitätsabfall des Schallfeldes in x-Richtung widerspiegelt. Aber in welcher Weise?

Das Schallfeld können wir (dritter Teil der Rechnung) analysieren nach den Anteilen[2]), die sich in bestimmten Richtungen fortpflanzen. Jeder dieser ∞-vielen Anteile klingt in seiner Fortpflanzungsrichtung der Absorption entsprechend exponentiell ab. Durch die Interferenz der verschiedenen Anteile entsteht das, was wir Schallfeldstruktur nennen. Die Rechnung zeigt, daß die Intensität der auf der x_1-Achse entstandenen Lichtlinie ein Integral über die Intensitäten bestimmter solcher Anteile ist. Wie diese Intensitäten fällt also die Intensität der Lichtlinie der Schallabsorption entsprechend ab. Die Interferenz der Anteile fällt optisch vollkommen weg.

In der Praxis werden dadurch, daß man das Licht primär nicht durch ein feines Loch, sondern einen Spalt ausblendet, solche „Lichtlinien" zu einem Band kontinuierlich nebeneinandergelegt. Da sie untereinander inkohärent sind, addieren sich einfach ihre Intensitäten. Die Rechnung gilt unabhängig von der Lichtwellenlänge, also ist auch über die Intensitäten der verschiedenen einfallenden Wellenlängen zu summieren.

In der Durchrechnung machen wir folgende Vernachlässigungen: Da alle vorkommenden Winkel klein sind, setzen wir ihre cos gleich 1, soweit sie als Faktoren von Amplituden auftreten. Bei phasenbestimmenden Faktoren entwickeln wir durchweg bis zur zweiten Ordnung. Die Linsen sehen wir als ideal und dünn an, da ja gut korrigierte Linsensysteme in der Wirkung dem entsprechen. Damit alle Winkel tatsächlich klein werden, nehmen wir hinreichend große Brennweiten an. Weil das Endresultat von den Brennweiten nicht abhängt, gilt es auch für

1) Vgl. O. Petersen, Physik. Zeitschr. **41**, 29, 1940.

2) Wegen der experimentell wichtigen Parallelitätsforderung sei auf die Ausführungen bei A. Lindberg (Physik. Zeitschr., erscheint demnächst) verwiesen.

1) Siehe unten.

2) Später auch als Partialwellen bezeichnet.

kürzere Brennweiten, und sinngemäß für vergrößernde oder verkleinernde Abbildungen an Stelle der wegen ihrer Einfachheit für die Rechnung gewählten Abbildungen 1 : 1. Um die belanglose Brennweite f aus der Rechnung loszuwerden, wählen wir sie als Längeneinheit.

Die Beugungsfigur in der ξ, ζ-Ebene berechnen wir in der von Debye[1]) angegebenen Form. Da wir uns grundsätzlich, experimentell durch genügend geringe Schallenergie, auf die Lichtabbeugung in erster Näherung beschränken, ist die Debyesche Methode in ihrer Allgemeinheit für uns die gegebene Methode.

Die im folgenden verwendeten Bezeichnungen stimmen weitgehendst mit denen der Debyeschen Arbeit überein[2]).

An Stelle der ebenen Welle, die nach Formel (13) bei Debye die Dielektrizitätskonstantenschwankung

$$\varepsilon_1 = \delta \cdot e^{i\Omega t} e^{-iK(\mathfrak{Z}^*, \mathfrak{r})} \qquad \text{(D 13)}$$

bewirkt, setzen wir für das in x, y, z-System laufende Schallfeld eine allgemeine, komplexe Wellenfunktion an.

$$\varepsilon_1 = e^{i\Omega t} \cdot U(x, y, z). \qquad (1)$$

Vom Experiment her wissen wir, daß die Schallwellen sich im großen und ganzen in einer Richtung fortpflanzen, also ist die Funktion U einer ungefähr in x-Richtung laufenden ebenen Welle ähnlich.

Die Amplitude des durch das Schallfeld (D 13) in eine erste Ordnung abgebeugten Lichtes beträgt bei Debye nach Formel (18)

$$\overline{\mathfrak{E}_1'} = \frac{\delta}{8\pi} \cdot \frac{\omega(\omega + \Omega)}{c^2} \cdot \frac{e^{-ikR}}{R} \left\{ \mathfrak{P} - \mathfrak{S}(\mathfrak{P}, \mathfrak{S}) \right\} \int e^{i(k\mathfrak{s} - K\mathfrak{Z}^*, \mathfrak{r})} dv .$$

Da wir cos-Faktoren vernachlässigen, ist der Polarisationsvektor $\mathfrak{P} - \mathfrak{S}(\mathfrak{P}, \mathfrak{S})$ des gebeugten Lichtes für jede einzelne Polarisationsrichtung $\mathfrak{P}$ des einfallenden Lichtes als Konstante anzusehen. Für die späteren Interferenzen kommt also nur der Betrag von $\overline{\mathfrak{E}_1'}$ in Betracht, so daß wir die Gleichung skalar schreiben können. Weil wir im Endresultat keine Absolutwerte, sondern nur die Relativwerte des Schallenergieabfalls und der zugehörigen Beugungslichtabnahme brauchen, ist es unnötig, die konstanten Faktoren vor dem Integral explizit mitzuschleppen. So bleibt von der letzten Gleichung

$$E_1 = \text{Const}\, e^{-ikR} \int e^{ik(\mathfrak{s}, \mathfrak{r})} \cdot \delta e^{-iK(\mathfrak{Z}^*, \mathfrak{r})} dv.$$

Ersetzen wir die Schallfeldfunktion $\delta e^{-iK(\mathfrak{Z}^*, \mathfrak{r})}$ durch unsere Schallfeldfunktion $U(x, y, z)$ nach Gleichung (1), so erhalten wir das in unserem Fall abgebeugte Licht. (Es ist: $k = 2\pi/\lambda$; $\mathfrak{r} = (x, y, z)$; R = Lichtweg von $x = y = z = 0$ bis Beobachtungspunkt.)

$$E_1 = \text{Const}\, e^{-ikR} \int e^{ik(\mathfrak{s}, \mathfrak{r})} U(x, y, z)\, dv . \qquad (2)$$

Für $\mathfrak{s}$, die Differenz der Richtungsvektoren des einfallenden und des abgebeugten Lichtes bestimmen wir die Komponenten. Der Richtungsvektor $\mathfrak{S}_0$ des einfallenden Lichtes (vgl. Fig. 1) hat bei Entwicklung der Winkel bis zur zweiten Ordnung die Komponenten $(-\gamma,\ 1 - \frac{1}{2}\gamma^2,\ 0)$. Das an einen Punkt ξ, ζ in der Brennebene der Linse gelangende Licht verläßt das Schallfeld mit dem Richtungsvektor $\mathfrak{S} = (\xi,\ 1 - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\zeta^2,\ \zeta)$. Durch Einsetzen der Differenz $\mathfrak{s} = \mathfrak{S} - \mathfrak{S}_0$ in Gleichung (2) erhalten wir E_1.

$$E_1 = \text{Const}\, e^{-ikR} \int e^{ik[(\gamma + \xi)x + \frac{1}{2}(\gamma^2 - \xi^2 - \zeta^2)y + \zeta z]} U(x, y, z)\, dv .$$

Der Lichtweg zur ξ, ζ-Ebene ist, wie aus Fig. 2 hervorgeht, für eine an einen Punkt ξ, ζ gelangende ebene Welle um die Strecke $\frac{1}{2}(\xi^2 + \zeta^2)$ kürzer als für die an den Punkt $\xi = \zeta = 0$ gelangende Welle. Wir erhalten demnach für den Phasenfaktor vor dem Integral $e^{ik[\frac{1}{2}(\xi^2 + \zeta^2) + \text{Const}]}$. Die Amplituden- und Phasenverteilung in der Beugungsfigur auf der ξ, ζ-Ebene ist also gegeben durch:

$$E_1(\xi, \zeta) = \text{Const}\, e^{ik\frac{1}{2}(\xi^2 + \zeta^2)} \int e^{ik[(\gamma + \xi)x + \frac{1}{2}(\gamma^2 - \xi^2 - \zeta^2)y + \zeta z]} U(x, y, z)\, dv . \qquad (3)$$

Der zweite Schritt der Rechnung ist die Bestimmung der Lichtverteilung in der x_1, ζ_1-Ebene, die aus der Beugungsfigur in der ξ, ζ-Ebene mit Hilfe der Zylinderlinse entsteht. Wir verwenden hierbei das Huyghenssche Prinzip. Da die Zylinderlinse die ζ-Richtung auf die ζ_1-Richtung 1 : 1 abbildet, dagegen in ξ-Richtung unwirksam ist, gelangen an einen bestimmten

1) P. Debye, Physik. Zeitschr. **33**, 849, 1932.

2) Der Leser, der das Zurückgreifen auf diese Arbeit sparen möchte, kann Formel (2) als daraus entnommenes Resultat hinnehmen.

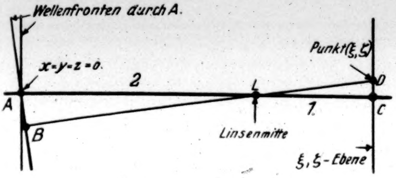


Fig. 2. Lichtweg vom Schallfeld bis zur ξ, ζ-Ebene. Bildebene durch Achse und Punkt $(\xi, \zeta) = D$. Es ist: $CD = \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}$; $AB \sim 2\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}$. Nach Pythagoras folgt: $LD = \sqrt{1 + \xi^2 + \zeta^2} \sim 1 + \frac{1}{2}(\xi^2 + \zeta^2)$ und ebenso $BL \sim 2 - (\xi^2 + \zeta^2)$; also ist $BD \sim 3 - \frac{1}{2}(\xi^2 + \zeta^2)$.

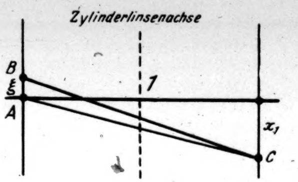


Fig. 3. Lichtweg von der ξ, ζ- bis zur x_1, ζ_1-Ebene. Bildebene durch Punkt $(\xi, \zeta) = B$, Längsachse der Zylinderlinse und Punkt $(x_1, \zeta_1) = C$. Nach Pythagoras ist: $AC = \sqrt{1 + x_1^2} \sim 1 + \frac{1}{2} x_1^2$, $BC \sim 1 + \frac{1}{2}(x_1 + \xi)^2$; also $BC - AC \sim x_1 \xi + \frac{1}{2}\xi^2$.

Punkt x_1, ζ_1 nur die Partialwellen von den Punkten mit $\zeta = \zeta_1$, aber allen ξ. Der Mehrweg für eine von einem Punkte ξ nach einem Punkte x_1 laufende Partialwelle gegenüber einer von $\xi = 0$ nach x_1 laufenden Welle[1]) beträgt nach Fig. 3 $\xi x_1 + \frac{1}{2}\xi^2$, also ergibt sich die Lichtamplitude E_2 an der Stelle x_1, ζ_1 zu:

$$E_2(x_1, \zeta_1) = \text{Const} \int E_1(\xi, \zeta = \zeta_1) e^{-ik(\xi x_1 + \frac{1}{2}\xi^2)} d\xi . \qquad (4)$$

Durch Einsetzen von E_1 nach Gleichung (3) und für das Folgende geeignetes Zusammenfassen der Faktoren wird daraus:

$$E_2(x_1, \zeta_1) = \text{Const} \int_\xi d\xi \int_x e^{ik\xi(x - x_1)} \cdot \left(e^{ik\frac{1}{2}\zeta_1^2} \int_{y,z} e^{ik[\gamma x + \frac{1}{2}(\gamma^2 - \zeta_1^2)y + \zeta_1 z]} U(x, y, z) e^{-ik\frac{1}{2}\xi^2 y} dy dz \right) dx . \qquad (5)$$

Wenn man $e^{-ik\frac{1}{2}\xi^2 y} = 1$ setzt[2]), ist das eingeklammerte Integral eine Funktion F von x und dem nicht interessierenden Parameter ζ_1. Nach dem Fourierschen Integraltheorem folgt dann aus

$$E_2(x_1, \zeta_1) = \text{Const} \int d\xi \int e^{ik\xi(x - x_1)} F(x, \zeta_1) dx$$

die Beziehung:

$$E_2(x_1, \zeta_1) = \text{Const} \cdot F(x_1, \zeta_1) .$$

Den Ausdruck F schreiben wir aus Gleichung (5) heraus, wobei wir den belanglosen, vor dem Integral stehenden Phasenfaktor weglassen.

$$E_2(x_1, \zeta_1) = \text{Const} \int e^{ik[\gamma x + \frac{1}{2}(\gamma^2 - \zeta_1^2)y + \zeta_1 z]} U(x_1, y, z) dy dz . \qquad (6)$$

Zur Messung gelangt die Gesamtintensität des Beugungslichts in Abhängigkeit von x_1, also

$$I(x_1) = \int |E_2(x_1, \zeta_1)|^2 d\zeta_1 . \qquad (7)$$

Als dritter Teil der Rechnung ist die Beziehung dieser optischen Größe zu Größen des Schallfeldes herzustellen.

Wie man ein Lichtwellenfeld nach ebenen Wellen analysieren kann, ist es auch mit einem Schallfeld möglich, denn wegen der Linearität der Differentialgleichung gilt auch hier das Superpositionsprinzip. Die einzelne ebene Welle sei durch den Richtungsvektor σ mit den Koordinaten $(1, \beta, \varepsilon)$ festgelegt (vgl. Fig. 1). Wir setzen sie in der Form an: (α = Absorptionskoeffizient, $K = 2\pi/\Lambda$):

$$u(\sigma) = e^{i\Omega t} e^{-iK(x + \beta y + \varepsilon z) - \frac{1}{2}\alpha x} . \qquad (8)$$

Diese Welle ist inhomogen, denn nicht die Wellenfronten, sondern die Flächen x = Const sind Flächen konstanter Amplitude. $u(\sigma)$ ist nur in erster Näherung in β und ε Lösung der Differentialgleichung für die Schallwellen. Diese Näherung ist für unsere Zwecke ausreichend. Die Wahl der inhomogenen Wellen erfolgt aus zwei Gründen:

Erstens geht die Analyse nach ihnen bei Integration über eine Fläche x = Const genau so vor sich, als wenn keine Absorption vorhanden wäre; man braucht sich also kein Kopfzerbrechen über

1) Da doch nur die Intensitäten auf der x_1, ζ_1-Ebene gebraucht werden, ist die Bezugnahme auf einen Achsenstrahl zur Festlegung der Phase überflüssig.

2) Der Fehler durch diese Vernachlässigung wird später abgeschätzt.

die Möglichkeit der Darstellung eines beliebigen Schallfeldes zu machen. Zweitens sind, wie sich zeigen wird, die inhomogenen Wellen in unseren optischen Integralen bereits vorhanden.

Die Amplitude einer solchen ebenen, inhomogenen Partialwelle des Schallfeldes $U(x, y, z)$ wird in einer Ebene mit bestimmtem x definiert durch das Integral

$$A(x, \beta, \varepsilon) = \int e^{iK(x+\beta y+\varepsilon z)} U(x, y, z)\, dy\, dz\,. \qquad (9)$$

Die Abhängigkeit von A von x hat, da durch die Integration die Partialwelle Gleichung (8) aus $U(x, y, z)$ herausgesiebt ist, die Form $e^{-\frac{1}{2}\alpha x}$.

Vergleichen wir jetzt die Integrale Gleichung (6) und (9) und beachten, daß $K = k\lambda/\Lambda = k\gamma$ ist, so finden wir: Sie stimmen völlig überein, wenn gesetzt wird:

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{\zeta_1^2}{\gamma}\right); \qquad \varepsilon = \frac{\zeta_1}{\gamma}\,. \qquad (10)$$

Also folgt:

$$E_2(x_1, \zeta_1) = \text{Const} \cdot A(x_1, \beta, \varepsilon)\,, \qquad (11)$$

wobei β, ε durch ζ_1 nach Gleichung (10) bestimmt wird. Die nach Gleichung (7) optisch schließlich gemessene Intensität $I(x_1)$ ist demnach einem Integral über die Amplitudenquadrate, also Intensitäten gewisser Partialwellen[1]) proportional, die einzeln und zusammengenommen wie $e^{-\alpha x}$ abfallen. $I(x_1)$ fällt also selbst wie $e^{-\alpha x_1}$ ab[2]).

Damit ist unser Nachweis, daß die beschriebene optische Meßmethode unabhängig von Schallfeldstrukturen die richtigen Schallabsorptionskoeffizienten liefert, beendet. Eines ist aber noch nachzutragen, nämlich die Abschätzung der grundsätzlichen Fehler der Methode. Diese Fehler sind erstens: Das Beugungsbild in der ξ, ζ-Ebene muß experimentell zwecks Wegfangens des Primärlichtes und des Streulichtes von Staubteilchen und dergleichen durch einen tunlichst engen Spalt ausgeblendet werden. Dabei wird von den Flügeln des Beugungsbildes etwas abgeschnitten, was eine gewisse Fälschung des Schallfeldbildes zur Folge hat. Zweitens haben wir von Gleichung (5) den Phasenfaktor $e^{-ik\frac{1}{2}\xi^2 y}$ vernachlässigt. Anschaulich ist dieser Fehler die Tiefenunschärfe der Abbildung des Schallfeldes. Er verschwindet in der x, z-Ebene, die von der Linse auf die x_1, ζ_1-Ebene abgebildet wird.

Wegen der Verflechtung der Fehler mit der Anwendung des Fourier-Integrals ist es dem Verfasser nicht gelungen, die Fehler allgemein zu berechnen. Durchführbar ist dagegen die Abschätzung der Größenordnung der zu erwartenden Fehler an Hand eines speziellen Beispiels. Die recht spezielle Rechnung wird hier nur skizziert und das Resultat angegeben.

Beide Fehler werden um so größer, je ausgedehnter das Beugungsbild in ξ-Richtung ist. Ungünstig wirken sich in diesem Sinne beugende Kanten einer Lichtblende aus, die hinter dem Schallfeld das abgebeugte Lichtbündel begrenzen. Am günstigsten ist es, eine Begrenzung des einfallenden parallelen Lichtstrahlenbündels vor dem Eintritt in das Schallfeld vorzunehmen[1]). Mit dem Abfall des Beugungslichtes gegen den Quarz hin, der sich bei dieser Anordnung in einem Schallfeld der Erstreckung l in Lichtrichtung geometrisch ergibt, und einer im übrigen idealen Schallfeldfunktion erhalten wir für das Beugungsbild unter Weglassung der unwesentlichen ζ-Abhängigkeit die Funktion:

$$E_1 = \frac{1}{2\pi k \xi^2}\left(\frac{1 - e^{ik\gamma l \xi}}{\gamma l} + \frac{\alpha}{2 - \dfrac{i\alpha}{k\xi}}\right). \qquad (12)$$

Sie ist so gewählt, daß sich ergibt:

$$E_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} E_1 e^{-ik\xi x_1} d\xi = e^{-\frac{1}{2}\alpha x_1} \quad \text{für} \quad 0 < x_1\,. \qquad (13)$$

Der erste Fehler entsteht dadurch, daß von diesem Integral durch die Ausblendung des Beugungsbildes zwischen $-\xi_0$ und $+\xi_0$[2]) die Teile von $-\infty$ bis $-\xi_0$ und von $+\xi_0$ bis $+\infty$ weggeschnitten werden. Durch Abschätzung dieser Teile unter Berücksichtigung des Oszillationsfaktors $e^{-ik\xi x_1}$ im Integral erhalten wir den

1) Die Fortpflanzungsrichtungen dieser in Betracht kommenden Partialwellen liegen nach Gleichung (10), wie aus Symmetriegründen zu erwarten, auf einem flachen Kegel mit der Öffnung $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\gamma$ um die Lichteinfallsrichtung herum.

2) Voraussetzung ist ungestörte Ausbreitung der Schallwellen. Anderenfalls kann man überhaupt nicht von einer bestimmten Partialwelle bei verschiedenen x sprechen, die Partialwellenzusammensetzung wird abhängig von x. Eine Möglichkeit, auch in diesem Fall zu messen, gibt die Petersensche Drehmethode (a. a. O.). Durch das Drehen wird erreicht, daß optisch nicht nur über die Intensitäten gewisser, sondern aller Partialwellen integriert wird. Man erhält ein $I(x_1)$, das der Gesamtintensität der Schallwellen proportional ist, die auch bei gestörter Ausbreitung in x-Richtung der Schallabsorption entsprechend abfällt. Bei der Fortführung der Experimente hat es sich allerdings vorerst als einfacher erwiesen, die Störungen auf ein unschädliches Maß herabzudrücken, als die Drehmethode durchzuführen.

1) Hierbei abgebeugtes Licht kann wegen seiner Inkohärenz mit dem am Schallfeld abgebeugten Licht durch eine Leeraufnahme ermittelt und bei Schallfeldaufnahmen abgezogen werden.

2) Im Experiment: $2\,\xi_0$ = Spaltbreite/f.

relativen Fehler von $E_2 = e^{-\frac{1}{2}\alpha x_1}$. Daraus bestimmen wir unter der Annahme, daß im Schallfeldbild ein Intensitätsbereich von etwa 10 : 1 durchgemessen wird, den relativen Fehler des sich ergebenden Absorptionskoeffizienten. Er wird

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} \approx \alpha\left(\frac{\Lambda}{\lambda l} + \frac{\alpha}{2}\right)\frac{\lambda^2}{40\,\xi_0^2}. \tag{14}$$

Der zweite Fehler durch den Phasenfaktor $e^{-ik\xi^2 y}$ in Gleichung (5) ist schlechter abzuschätzen. Am kleinsten wird der Fehler jedenfalls in der sog. Bragg-Stellung, denn ein dem störenden gleicher Phasenfaktor tritt im Integral Gleichung (9) auf, wenn man das β nach Gleichung (10) durch $\beta' = \beta - \xi^2/\gamma$ ersetzt. Der Fehler von $E_1(\xi, \zeta)$ entspricht folglich dem Unterschied zwischen $A(\beta', \varepsilon)$ und $A(\beta, \varepsilon)$, da es sich um dieselben Integrale handelt. Dieser letztere Unterschied wird am kleinsten, wenn $dA/d\beta$ für $\xi = 0$ verschwindet. Das ist aber in der Bragg-Stellung für den Hauptteil des Schallfeldes der Fall. Für diese Stellung gilt die Abschätzung.

E_1 wird sich aus dem Integral Gleichung (5) völlig falsch ergeben, wenn der Exponent des störenden Phasenfaktors an den Enden des Schallfeldes, bei $y = \pm \frac{1}{2} l$ etwa die Größe 1 erreicht, also $k \cdot \frac{1}{2}\xi^2 \cdot \frac{1}{2} l = 1$ ist. Wir dürften die Größenordnung des Fehlers erhalten, wenn wir an den aus dieser Gleichung folgenden Stellen $\xi = \pm\sqrt{4/kl}$ das Integral Gleichung (13) abschneiden. Dieser Fehler ist nach einer etwas weitergehenden Rechnung noch etwa zu verdoppeln, weil im mitgenommenen Teil des Integrals der Integrand nicht fehlerfrei ist. Insgesamt ergibt sich so der Fehler zu:

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} \approx \alpha\left(\frac{\Lambda}{\lambda l} + \frac{\alpha}{2}\right)\frac{\lambda l}{10}. \tag{15}$$

In Gleichung (14) und (15) ist selbstverständlich nur die Größenordnung der zu erwartenden Fehler unter den angegebenen experimentell günstigsten Bedingungen wiedergegeben. Bei zufällig ungünstiger Partialwellenzusammensetzung des Schallfeldes und unglücklichem Zusammenkommen von entgegengesetzt gleich oszillierenden Funktionen in den Integralen könnten die Fehler um einen Faktor von der Größenordnung 2, vielleicht sogar 5, größer werden. Andererseits könnte der zweite Fehler vielleicht prinzipiell kleiner sein, denn er beruht ja auf der Tiefenunschärfe der Abbildung des Schallfeldes. Nun bleibt aber ein exponentieller Abfall bei Unscharfabbildung von einer bestimmten Grenze an exakt erhalten. Es ist nur fraglich, ob man diesen Schluß hier anwenden darf, da wir es mit Interferenzerscheinungen zu tun haben, nicht mit dem Fall der Überlagerung von Intensitäten, für den der Schluß gilt.

Die in Gleichung (14) und (15) angegebenen Fehler machen die Messung sehr großer Absorptionskoeffizienten unmöglich[1]). Bei kleinen Absorptionskoeffizienten werden sie dagegen unkritisch. Es kommt dann auch nicht mehr darauf an, ob die erwähnten günstigsten Bedingungen eingehalten werden.

Zusammenfassung

Behandelt wird die in Fig. 1 schematisch dargestellte Anordnung. In der x_1, ζ_1-Ebene, in der die photographische Aufnahme gemacht wird, bildet man in x_1-Richtung das im x, y, z-System laufende Schallfeld im Lichte einer ersten Ordnung ab, während in ζ_1-Richtung das Beugungsbild aus der ξ, ζ-Ebene bzw., was damit gleichbedeutend ist, der gleichmäßig beleuchtete primäre Ausblendespalt abgebildet wird. Auf dem Wege über die Beugungsordnung in der ξ, ζ-Ebene wird die Intensitätsverteilung in der x_1, ζ_1-Ebene berechnet. Der Intensitätsabfall in x_1-Richtung gleicht dem Intensitätsabfall gewisser ebener Partialwellen des Schallfeldes in x-Richtung, gibt also den richtigen Schallabsorptionskoeffizienten α unabhängig von Schallfeldstruktur und -divergenz wieder. Vorausgesetzt ist hierbei ungestörte Ausbreitung der Schallwellen.

Die grundsätzlichen Fehler werden für den experimentell günstigsten Fall der Größenordnung nach abgeschätzt. Sie sind bei kleinen Absorptionskoeffizienten, etwa $\alpha < 10$, unbedeutend, vereiteln aber die Messung sehr großer Absorptionskoeffizienten.

1) Eventuell besteht die Möglichkeit der Bestimmung höherer α aus der Breite des Beugungsbildes.

Hamburg, Physikalisches Staatsinstitut.

(*Eingegangen 4. Dezember 1939*)

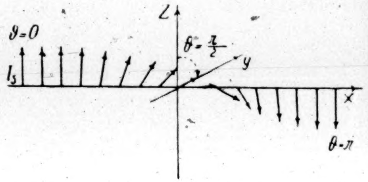
Zum Permalloy-Problem

Von H. Schlechtweg

Einleitend skizzieren wir kurz die Problemstellung. Die magnetische Permeabilität hat in dem System der Eisen-Nickellegierungen einen scharfen Höchstwert bei etwa 78,5 Proz. Nickel; man bezeichnet daher gelegentlich diese Legierung als Permalloy. Sie besitzt die auffällige Eigenschaft, daß sie nach rascher Abkühlung von 600° C eine sehr hohe Permeabilität besitzt, nach langsamer Abkühlung oder gar nach längerem Glühen in der Gegend etwas unter 600° mit nachfolgender langsamer Abkühlung aber eine erheblich tiefere Permeabilität.

Die Erklärung dieser interessanten Erscheinung, die zudem wegen der dabei auftretenden hohen Permeabilitäten eine große technische Bedeutung besitzt, ist Gegenstand sehr vieler Überlegungen gewesen, von denen jedoch keine ohne besondere Annahme auskommt. Die Grundlage, auf der sie sämtlich beruhen, ist die von Dahl[1]) und später von Kaja[2]) durch Messung des spezifischen elektrischen Widerstandes und der spezifischen Wärme nahegelegte Erkenntnis, daß in der langsam abgekühlten Legierung ein Zustand geordneter Atomverteilung[3]) vorliegt. Die Frage, warum der geordneten Atomverteilung eine tiefere Permeabilität zukommt, ist, wie gesagt, bereits Gegenstand zahlreicher, auf verschiedenen Annahmen gegründeter Überlegungen gewesen. Im folgenden soll auf Grund einer kürzlich durchgeführten Untersuchung[4]) die tiefere Permeabilität des geordneten Zustandes plausibel gemacht werden.

Wir rufen zunächst kurz unsere Kenntnisse über die beteiligten ferromagnetischen Elementarprozesse[5]) in die Erinnerung zurück. Die makroskopisch wahrnehmbare Magnetisierung erfolgt in den hier in Betracht kommenden Feldern so, daß diejenigen spontan bis zur Sättigung magnetisierten Elementarbereiche des Ferromagnetikums, die günstiger zur Feldrichtung liegen, die nach anderen Richtungen spontan magnetisierten Elementarbereiche aufzehren; dies geschieht durch eine Verschiebung der Wände. Die Arbeit, die man in Form eines äußeren Magnetfeldes aufzuwenden hat, um eine etliche Atomschichten dicke Wand um ein kleines Stück zu verschieben, ist gegeben durch die Differenz der inneren magnetischen Energie der Wand in der Anfangs- und Endlage, mit anderen Worten: durch den Gradienten der inneren magnetischen Energie im Werkstoff. In der Figur ist schematisch der Übergang der Rich-



Die Spin-Orientierung in der Wand zwischen zwei antiparallel magnetischen Elementarbereichen (nach M. Kersten in R. Becker, Probl. d. techn. Magnetisierungskurve, Berlin 1938, S. 49).

tung der spontanen Magnetisierung von einem nach oben magnetisierten Bereich, der auf der linken Seite der Figur anschließend zu denken ist, dargestellt in die Magnetisierungsrichtung eines nach unten magnetisierten Bereichs (für die Anfangspermeabilität kommen praktisch nur derartige 180°-Wände in Frage); von Atom zu Atom ist dabei das magnetische Moment um einen Winkel verdreht. In jedem Punkt des Wandinnern ist die innere magnetische Energie dadurch bestimmt, wie fest die spontane Magnetisierung an die Vorzugslage gebunden ist und wie schwer zwei Nachbarspins aus der parallelen Lage zu drehen sind. Versucht man die niedrige Permeabilität des geordneten Zustandes beim Permalloy durch geeignete Ausbildung der Vorzugsrichtung zu erklären, so scheint man nicht ohne eine Ad-hoc-Annahme auszukommen[1]). Es ist natürlich denkbar, daß eine solche Annahme sich tatsächlich in der Natur als erfüllt erweist, wenn auch experimentelle Entscheidungen noch ausstehen. Um so befriedigender ist es jedoch, daß derjenige Anteil der innermagnetischen Wandenergie, der mit der Schwierigkeit, parallele Spins aus ihrer parallelen Lage zu drehen, verbunden ist, exakter gesprochen, der durch das Austauschintegral zweier Nachbaratome gegebene Energie-

1) O. Dahl, Zeitschr. f. Metallkunde **24**, 107, 1932; **28**, 133, 1936.

2) S. Kaja, Journ. Fac. Sci. Hokkaido (2) **2**, 29, 1938.

3) Anmerkung bei der Korrektur: Inzwischen gelang der Nachweis einer Überstruktur mit einer Strahlung (Kobalt $K\alpha$), deren Wellenlänge in der Nähe der Absorptionskante des Eisens gewählt war zwecks kräftiger Erniedrigung des Streuvermögens der Eisenatome gegenüber den Nickelatomen (P. Leech und C. Sykes, Phil. Mag. (7) **27**, 1939, 742), nachdem ein vorhergehender Versuch von Haworth (Phys. Rev. **54**, 1938, 693) mit Eisen $K\beta$-Strahlung wohl infolge kleiner Abweichungen des Streuvermögens von der theoretischen Voraussage fehlgeschlagen war.

4) H. Schlechtweg, Forschungsber. Krupp **2**, 167, 1939; Ann. d. Phys. **35**, 657, 1939.

5) Vgl. z. B. R. Becker und W. Döring, Ferromagnetismus, Berlin 1939.

1) R. Becker und W. Döring, a. a. O., S. 416.

anteil, eine Erklärung für die geringere makroskopische Magnetisierung bei geordneter Atomverteilung zu liefern scheint, wie jetzt näher besprochen werden soll.

Je weniger das Austauschintegral zweier Nachbaratome von Ort zu Ort im Kristall schwankt, eine desto höhere Permeabilität dürfen wir erwarten, da dann die Wandenergie ebenfalls nur wenig schwankt[1]), also einen kleineren Gradienten hat. Im ungeordneten Zustand gibt es Ansammlungen von Atomen gleicher Art, etwa solche von Nickelatomen und solche von Eisenatomen, die eventuell durch schon geordnete Bereiche voneinander getrennt sind. Innerhalb von solchen Ansammlungen gleicher Atome ist das Austauschintegral frei von Schwankungen, Abwesenheit von Gitterstörungen natürlich vorausgesetzt; räumliche Änderungen des Austauschintegrals treten nur an den verhältnismäßig wenig Stellen auf, wo Ansammlungen von Nickelatomen grenzen an Ansammlungen von Eisenatomen oder an geordnete Bereiche. Befinden sich jedoch nach Eintritt des Ordnungsvorgangs an Stellen, wo vorher Ansammlungen gleicher Atome lagen jetzt geordnete Bereiche, so bekommt man in diesen räumlichen Gebieten, da 78,5 Proz. Nickelatome und 21,5 Proz. Eisenatome jetzt da sind, räumliche Verschiedenheiten im Austauschintegral. Es erscheint somit plausibel, daß im geordneten Zustand beim Permalloy eine nicht so hohe Permeabilität auftreten kann als bei ungeordneter Atomverteilung, da im letzten Fall weniger Bezirke mit ortsveränderlichem Austauschintegral vorliegen.

Ob diese Erklärungsmöglichkeit des Permeabilitätsunterschiedes im geordneten und ungeordneten Zustand freilich quantitativ tatsächlich ausreichend ist, läßt eine solche rein qualitative Betrachtung nicht erkennen. Ebensowenig soll damit nicht eine der bis jetzt in der Literatur zur Deutung des Permalloys gemachten Annahmen als einflußlos hingestellt werden; es könnte sehr wohl sein, daß gewisse unter ihnen auf den hier diskutierten Effekt verstärkend oder abschwächend einwirken könnten. So dürfte bei der Abkühlung im Magnetfeld, die bekanntlich zu einer ziemlichen Erhöhung der Permeabilität führen kann[2]), tatsächlich der Einfluß der entstehenden starken Vorzugsrichtung überwiegen.

Zum Schluß noch ein Wort zur Abgrenzung des eben besprochenen Problems gegenüber ähnlichen Erscheinungen, bei denen ebenfalls die

1) Siehe Fußnote 4) auf S. 42.
2) Vgl. die zusammenfassende Darstellung bei R. Becker und W. Döring, Ferromagnetismus, Berlin 1939, S. 418.

Entstehung der Überstruktur nicht mit der Entstehung einer neuen Kristallart verbunden zu sein scheint; daß es Fälle gibt, wo der geordnete Zustand eine höhere Sättigung hat als der ungeordnete [z. B. Ni_3Mn[1]), Pd_3Mn_2[2]), $PdMn$[2]), die Heusler-Legierungen] oder auch eine tiefere Sättigung (z. B. Ni_3Pt[3]) ist ein Problem der Höhe der spontanen Magnetisierung selbst und nicht das hier in Rede stehende Problem der Wandverschiebung in einer Legierung aus ferromagnetischen Bestandteilen.

Wir fassen kurz zusammen: Beim Permalloy ist eine Möglichkeit für höhere Permeabilität des ungeordneten Zustandes dadurch gegeben, daß eine Barkhausenwand sich leichter durch ferromagnetische Ansammlungen von Atomen gleicher Art verschieben lassen dürfte als durch geordnete Bereiche.

1) S. Kaja und A. Kußmann, Zeitschr. f. Phys. **72**, 293, 1931.
2) G. Grube und O. Winkler, Zeitschr. f. Elektrochem. **42**, 815, 1936.
3) A. Kußmann und H. Nitka, Metallw. **17**, 657, 1938.

Essen, Versuchsanstalt der Friedrich-Krupp-AG., den 7. November 1939.

(Eingegangen 28. November 1939)

Über die Bracesche Halbschattenmethode

Von G. Szivessy und W. Herzog

1. Vor kurzem hat Björnståhl[1]) unter dieser Überschrift die Messung der Phasendifferenz einer doppelbrechenden Schicht mit Hilfe des Braceschen Kompensators besprochen und die allgemeingültigen Formeln für die beiden bei dieser Messung möglichen Anordnungen hergeleitet. Es scheint Björnståhl entgangen zu sein, daß wir schon vor einiger Zeit eine Untersuchung über die strengen Formeln des Braceschen Kompensators veröffentlicht haben[2]), die unter anderem auch die von Björnståhl gewonnenen Ergebnisse enthält. Dort haben wir auch die von Björnståhl beanstandeten Fehler in den bisherigen Darstellungen des Braceschen Meßverfahrens richtiggestellt. Es handelt sich hierbei zunächst um eine in Wirklichkeit nur für sehr kleine Phasendifferenzen von Prüfling und Kompensatorplatte zulässige Verallgemeinerung, die der eine von uns im „Handbuch der Physik"

1) Y. Björnståhl, Physik. Zeitschr. **40**, 437, 1939.
2) G. Szivessy und W. Herzog, Zeitschr. f. Instrumentenkunde **57**, 49, 1937.

vorgenommen hat[1]), sowie um die Angabe der Grenzen[2]), innerhalb welcher sie statthaft ist; ferner um eine Unrichtigkeit in der neuesten Auflage des „Kohlrausch"[3]), wo das angegebene Formelsystem nicht für die Anordnung gilt, die bei der dortigen Betrachtung vorausgesetzt wird[4]).

Björnståhl hält den Braceschen Kompensator für das geeignetste Hilfsmittel zur Messung von Phasendifferenzen und stellt ihn über den von Dierkesmann und dem einen von uns angegebenen vereinfachten Halbschattenkompensator[5]), weil dessen Halbschattenplatte angeblich nicht hinreichend dünn gewählt werden könne, so daß ihre Begrenzungslinie bei Bestimmung des Halbschattens störend wirke. Diese Ansicht beruht aber auf einer irrtümlichen Abschätzung der für die Existenz der Halbschattenstellungen notwendigen Bedingung. In Wirklichkeit läßt sich, namentlich bei der Messung kleiner Phasendifferenzen, die Halbschattenplatte des vereinfachten Halbschattenkompensators stets hinreichend dünn halten, so daß die Begrenzungslinie bei den Halbschattenstellungen verschwindet.

Auf diese Frage und die erheblichen grundsätzlichen Nachteile, die der Bracesche Kompensator gegenüber dem vereinfachten Halbschattenkompensator besitzt, wird demnächst an anderer Stelle ausführlich eingegangen[6]). Hier sollen nur einige ergänzende und berichtigende Bemerkungen zu den Betrachtungen von Björnståhl zur Sprache kommen.

Bezüglich der Bezeichnungen treffen wir folgende Festsetzungen. Das Azimut einer Schwingungsrichtung gegen eine gegebene feste Richtung, die senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der betrachteten Strahlung liegt, soll dann positiv sein, wenn die diesem Azimut entsprechende Drehung mit jener Fortpflanzungsrichtung eine Rechtsschraubung bildet. Unter dem Azimut einer doppelbrechenden Platte verstehen wir das Azimut der beschleunigenden Hauptschwingungsrichtung der Platte. Die Phasendifferenz δ einer doppelbrechenden Platte nehmen wir stets positiv ($0 \gtreqless \delta \leqq 2\pi$), kennzeichnen sie also durch den Phasenvorsprung, den die schnellere Hauptkomponente beim Durchgang durch die Platte gegenüber der langsameren Hauptkomponente erhalten hat.

2. Die von Björnståhl hervorgehobene grundsätzliche Verschiedenheit der beiden Anordnungen, die bei der Messung der Phasendifferenz einer doppelbrechenden Schicht mit Hilfe des Braceschen Kompensators möglich sind, nämlich:

α) Polarisator — Prüfling — Halbschattenplatte — Kompensatorplatte — Analysator,

β) Polarisator — Prüfling — Kompensatorplatte — Halbschattenplatte — Analysator,

ist schon lange bekannt und wurde zuerst von Tuckerman[1]) herausgestellt. Bald darauf hat Hebecker[2]) beide Anordnungen für den Fall kleiner Phasendifferenzen behandelt. Die strengen, für beliebige Phasendifferenzen geltenden Formeln sind von uns in der zu Beginn erwähnten Abhandlung eingehend erörtert worden.

Um in der Bezeichnungsweise möglichst Übereinstimmung mit Björnståhl zu erhalten, nennen wir Δ die Phasendifferenz des Prüflings, Δ_0 die der Kompensatorplatte und Δ_h die der Halbschattenplatte.

Bei der Anordnung α) rechnen wir sämtliche Azimute gegen die Schwingungsrichtung des Analysators, bei der Anordnung β) gegen die Schwingungsrichtung des Polarisators. Die strengen Formeln nehmen nur dann einfache Formen an, wenn die Hauptschwingungsrichtungen von Prüfling und Halbschattenplatte parallel liegen und bei der Anordnung α) gegen den Analysator, bei der Anordnung β) gegen den Polarisator die Azimute $+\frac{\pi}{4}$ oder $-\frac{\pi}{4}$ besitzen. Man pflegt die beschleunigenden Hauptschwingungsrichtungen parallel zu legen, weil dann der Meßbereich größer[3]) und außerdem der Einfluß der Meßfehler auf die zu bestimmende Phasendifferenz Δ geringer[4]) wird. Das Azimut der Kompensatorplatte bezeichnen wir mit ψ bzw. ψ', je nachdem

1) G. Szivessy, im Handb. d. Physik, herausgegeben von H. Geiger und K. Scheel, Bd. 19, S. 946, Berlin 1928.

2) G. Szivessy und W. Herzog, Zeitschr. f. Instrumentenkunde **57**, (§ 7c), 1937.

3) O. Schönrock, in: F. Kohlrausch, Praktische Physik, 17. Aufl., S. 458, Berlin und Leipzig 1935.

4) G. Szivessy und W. Herzog, Zeitschr. f. Instrumentenkunde **57**, 50 und 59, 1937.

5) G. Szivessy und A. Dierkesmann, Ann. d. Phys. (5) **11**, 949, 1931; Zeitschr. f. Instrumentenkunde **52**, 337, 1932; W. Herzog, Zeitschr. f. Phys. **97**, 225, 1935.

6) G. Szivessy und W. Herzog, Zeitschr. f. Instrumentenkunde **60**, 1940 (im Druck).

1) L. B. Tuckerman, Univ. Stud. Nebraska **9**, 186 und 192, 1909.

2) O. Hebecker, Der Halbschattenkompensator von Brace. Ein Beitrag zur Kenntnis der elliptischen Reflexionspolarisation. Dissertation Göttingen 1912.

3) C. A. Skinner, Journ. opt. Soc. Amer. **10**, 516, 1925.

4) C. Bergholm, Uppsala Univ. Årsskr. Matem. och Naturvetensk., **1915** (Nr. 1), 15 und 23; F. Kohlrausch, Praktische Physik, 17. Aufl., S. 459, Leipzig und Berlin 1935.

es gegen die Schwingungsrichtung des Analysators bzw. gegen die Schwingungsrichtung des Polarisators gerechnet ist; es ist dann offenbar $\psi - \psi' = \varphi$ das Azimut des Polarisators gegen den Analysator. Das Halbschattenazimut der Kompensatorplatte sei $\psi = \overline{\psi}$ bei der Anordnung α) und $\psi' = \overline{\psi}'$ bei der Anordnung β).

Die von Björnståhl für eine beliebige Phasendifferenz Δ angegebenen Schlußformeln[1]) sind nicht vollständig insofern, als sie noch die Phasendifferenz Δ_h enthalten, die man nicht kennt und bekanntlich dadurch eliminiert, daß man außer dem Halbschattenazimut $\overline{\psi}$ bzw. $\overline{\psi}'$ noch ein zweites Halbschattenazimut $\overline{\psi}_0$ bzw. $\overline{\psi}_0'$ bei linearer Polarisation der auf die Kompensatorplatte fallenden Strahlung (Entfernen des Prüflings aus dem Strahlengang) bestimmt.

Die vollständige, für die Anwendung geeignete strenge Formel des Braceschen Kompensators, die Δ_h nicht mehr enthält, lautet[2]) für die Anordnung α)

$$\operatorname{tg}\Delta = \mp \sin\Delta_0 (\sin 2\psi - \sin 2\overline{\psi}_0)\,\frac{1 + 2\sin 2\overline{\psi}\sin 2\overline{\psi}_0 \sin^2\frac{\Delta_0}{2}}{\left(1 - 2\sin^2 2\overline{\psi}\sin^2\frac{\Delta_0}{2}\right)\left(1 - 2\sin^2 2\overline{\psi}_0 \sin^2\frac{\Delta_0}{2}\right)} \tag{1}$$

und für die Anordnung β)

$$\operatorname{tg}\Delta = \mp \sin\Delta_0 (\sin 2\overline{\psi}' - \sin 2\overline{\psi}_0')\,\frac{1 + 2\sin 2\overline{\psi}'\sin 2\overline{\psi}_0'\sin^2\frac{\Delta_0}{2}}{\cos\Delta_0\left(1 - 2\sin^2 2\overline{\psi}_0'\sin^2\frac{\Delta_0}{2}\right) + 2\sin 2\overline{\psi}'\sin 2\overline{\psi}_0'\sin^2\Delta_0}\,. \tag{2}$$

Bei Gleichung (1) gilt das obere bzw. das untere Vorzeichen, je nachdem Prüfling und Halbschattenplatte gegen die Schwingungsrichtung des Analysators die gleichen Azimute $+\frac{\pi}{4}$ bzw. $-\frac{\pi}{4}$ besitzen; für das Doppelvorzeichen bei Gleichung (2) gilt Entsprechendes, nur tritt an Stelle der Schwingungsrichtung des Analysators die Schwingungsrichtung des Polarisators.

Die Gleichungen (1) und (2) sind von uns in der genannten Abhandlung eingehend erörtert worden. Wir haben dort auch die Bedingungen angegeben, die erfüllt sein müssen, damit Gleichung (1) und (2) in die bekannten Näherungsformeln übergehen, sowie die Grenzfälle, in welchen diese Näherungsformeln miteinander vertauscht werden dürfen. Für die Fehler, welche entstehen, wenn diese Vertauschung ohne die hierfür erforderlichen Voraussetzungen erfolgt, hat Björnståhl eine bemerkenswerte Zusammenstellung gegeben.

3. In den Formeln (1) und (2) geht das Azimut φ des Polarisators gegen den Analysator nicht ein. Bei der Anordnung α) ist die Schwingungsrichtung des Analysators festgelegt, da sie gegen die (parallelliegenden) Beschleunigungsrichtungen von Prüfling und Halbschattenplatte das Azimut $-\frac{\pi}{4}$ oder $+\frac{\pi}{4}$ besitzen muß; für die Anordnung β) gilt das Entsprechende für die Schwingungsrichtung des Polarisators. Hieraus folgt, daß bei der Anordnung α) der Polarisator und bei der Anordnung β) der Analysator beliebig verstellt werden kann, ohne daß sich das Halbschattenazimut $\overline{\psi}$ bzw. $\overline{\psi}'$ ändert; nur die Empfindlichkeit der Halbschatteneinstellungen und die Intensität des Gesichtsfeldes wird hierdurch beeinflußt. Dieses von Björnståhl dargelegte Verhalten ist schon lange bekannt, und bei der Anordnung α) zuerst von Bergholm[3]), bei der Anordnung β) schon von Tuckerman[4]) aufgezeigt worden.

Das Azimut $\overline{\varphi}$ des Polarisators gegen den Analysator, bei welchem die Halbschattenempfindlichkeit am größten ist, bestimmt sich, wie wir gezeigt haben[5]), bei der Anordnung α) durch

$$\sin 2\overline{\varphi} = -\sin 4\overline{\psi}\sin^2\frac{\Delta_0}{2} \tag{3}$$

und bei der Anordnung β) durch

$$\left.\begin{aligned}\sin 2\overline{\varphi} &= \sin 4\overline{\psi}'\sin^2\frac{\Delta_0}{2}\cdot\cos\Delta\\ &\pm \cos 2\psi'\sin\Delta_0\sin\Delta\,,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

wobei beim zweiten Gliede rechts das obere bzw. das untere Vorzeichen zu nehmen ist, je

1) Y. Björnståhl, a. a. O., Gleichung (9) und (19) bzw. Gleichung (I) und (II). — Bei Gleichung (II) fehlt beim ersten Glied des Zählers das Minuszeichen.

2) G. Szivessy und W. Herzog, Zeitschr. f. Instrumentenkunde **57**, 57 (§ 7), 1937.

3) C. Bergholm, Uppsala Univ. Arsskr. Matem. och Naturvetensk. **1915** (Nr. 1), 9, 23 und 64.

4) L. B. Tuckerman, Univ. Stud. Nebraska **9**, 193, 1909.

5) G. Szivessy und W. Herzog, Zeitschr. f. Instrumentenkunde, **57**, 61, (§ 8) 1937.

nachdem Prüfling und Halbschattenplatte gegen den Polarisator das Azimut $+\frac{\pi}{4}$ bzw. $-\frac{\pi}{4}$ besitzen.

$\overline{\varphi}$ und $\overline{\varphi}'$ hängen gemäß den Halbschattenbedingungen außer von Δ_0 auch noch von Δ und Δ_h ab; das gleiche gilt somit auch für die durch Gleichung (3) bzw. (4) bestimmten Azimute $\overline{\varphi}$. Bei gegebenen Konstanten des Kompensators (Δ_0 und Δ_h) hat man daher bei Prüflingen verschiedener Phasendifferenz Δ auch verschiedene zugehörige Polarisatorazimute $\overline{\varphi}$, die in jedem einzelnen Falle durch Ausprobieren bestimmt werden müssen.

Das Azimut $\overline{\varphi}$ entspricht aber keineswegs minimaler Intensität des Gesichtsfeldes. Die zu den beiden Anordnungen α) und β) gehörenden Polarisatorazimute φ_m, bei welchen ein Minimum der Intensität vorhanden ist, sind vielmehr, wie wir gezeigt haben, von den durch Gleichung (3) und (4) bestimmten Azimuten $\overline{\varphi}$ gänzlich verschieden. Die Unterschiede zwischen $\overline{\varphi}$ und φ_m können bei größeren zu messenden Phasendifferenzen Δ gut merklich werden.

Die Bemerkung von Björnståhl[1]), daß man durch Änderung des Polarisatorazimuts auf Minimum der Intensität einzustellen hat, ist daher nicht streng richtig.

4. Für den eingangs erwähnten vereinfachten Halbschattenkompensator von Dierkesmann und dem einen von uns gilt die Beziehung

$$\operatorname{tg}\Delta = \mp \sin 2\overline{\varphi} \operatorname{tg}\frac{\Delta_0}{2}, \qquad (5)$$

wobei Δ_0 die Phasendifferenz der (zugleich als Halbschattenplatte dienenden) Kompensatorplatte, $\overline{\varphi}$ ihr Halbschattenazimut gegen die Schwingungsrichtung des Polarisators und Δ wieder die Phasendifferenz des Prüflings bedeutet. Je nachdem sich dieser im Azimut $+\frac{\pi}{4}$ oder $-\frac{\pi}{4}$ gegen die Schwingungsrichtung des Polarisators befindet, gilt in Gleichung (5) das obere bzw. das untere Vorzeichen. Das Azimut $\overline{\varphi}$ ändert sich nicht, wenn der Analysator verstellt wird[2]); unabhängig von Δ und Δ_0 hat man hier immer dann maximale Halbschattenempfindlichkeit, wenn sich Polarisator und Analysator in der stets leicht zu erzielenden gekreuzten Stellung befinden.

Vergleicht man Gleichung (5) mit den Formeln (1) und (2) des Braceschen Kompensators, so fällt deren Kompliziertheit ins Auge. Weit schwerwiegender ist aber folgender Nachteil des Braceschen Kompensators, den dieser übrigens auch gegenüber manchen anderen gleich empfindlichen Kompensatoren [z. B. dem Mac Cullagh-Stokesschen Kompensator mit Halbschattenvorrichtung[1]) und dem mit Halbschattenvorrichtung ausgestatteten Viertelwellenlängenkompensator[2])] besitzt:

Während beim vereinfachten Halbschattenkompensator nach Gleichung (5) nur das eine Halbschattenazimut $\overline{\varphi}$ zu bestimmen ist, hat man beim Braceschen Kompensator, wie die Gleichungen (1) und (2) zeigen, jedesmal zwei Halbschattenazimute $\overline{\varphi}$ und $\overline{\varphi}_0$ (bzw. $\overline{\varphi}'$ und $\overline{\varphi}_0'$) zu messen, von welchen das eine mit der zu messenden elliptisch polarisierten Strahlung, das andere mit einer linear polarisierten Strahlung gleicher Frequenz gewonnen wird. Die Bestimmung dieser beiden Halbschattenazimute erfolgt in getrennten Meßreihen. Bei kleinen zu messenden Phasendifferenzen Δ sind die Meßfehler bei beiden von derselben Größenordnung und gehen in das Schlußergebnis angenähert additiv ein. Bei der Messung mit dem vereinfachten Halbschattenkompensator ist, da nur $\overline{\varphi}$ zu bestimmen ist, diese doppelte Fehlerquelle nicht vorhanden. Da sich beim vereinfachten Halbschattenkompensator dieselbe Halbschattenempfindlichkeit erzielen läßt wie beim Braceschen Kompensator, so ist in der Tat unter gleich günstigen Bedingungen die mit dem vereinfachten Halbschattenkompensator ausgeführte absolute Messung einer Phasendifferenz Δ stets mit einem merklich geringeren Fehler behaftet als die entsprechende Messung mit dem Braceschen Kompensator[3]).

Schon aus diesem Grunde können wir, abgesehen von weiteren Nachteilen des Braceschen Kompensators (u. a. Unmöglichkeit der Bestimmung von Δ_0 ohne Zuhilfenahme fremder Methoden, Unmöglichkeit der Bestimmung des Azimuts einer Schwingungsellipse), der Ansicht von Björnståhl nicht beipflichten, daß die Bracesche Methode zur Messung von Phasendifferenzen unübertroffen dasteht.

1) Y. Björnståhl, a. a. O., S. 442 [Bemerkung im Anschluß an Gleichung (22)].

2) G. Szivessy, A. Dierkesmann und Cl. Münster, Zeitschr. f. Phys. **82**, 294, 1933.

1) E. Perucca, N. Cim. (6) **6**, 179, 1913; Zeitschr. f. Phys. **8**, 63, 1921; Ch. Bouhet, Ann. de phys. (10) **15**, 19, 1915.

2) L. Chaumont, Ann. de phys. (9) **4**, 175, 1915; J. Rabinovitch, Rev. d'opt. **15**, 63, 1936.

3) G. Szivessy und A. Dierkesmann, Ann. d. Phys. (5) **11**, 978, 1931.

Berlin, im November 1939.

(Eingegangen 6. November 1939)

Bemerkungen zur Analogie der Schrödingerschen Differentialgleichung mit einer Wellengleichung

Von F. Matossi

1. In seiner bekannten zweiten Mitteilung über die Quantisierung als Eigenwertproblem[1]) hat Schrödinger bemerkt, daß die Gleichung

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = \Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0 \qquad (1)$$

nicht die einzige sei, welche mit der Forderung verträglich sei, daß sie die Bewegung von Materiewellen mit der Phasengeschwindigkeit $\frac{E}{\sqrt{2(E-U)}}$ beschreibe. Man darf nämlich das erste Glied der Schrödingerschen Differentialgleichung durch den allgemeineren Ausdruck

$$a \operatorname{div}\left(\frac{1}{a}\operatorname{grad}\psi\right)$$

ersetzen, da a eine willkürliche Funktion der Koordinaten ist, die man aber nach physikalischen Gesichtspunkten sinnvoll auswählen wird. Die Benutzung des allgemeineren Ausdrucks statt $\Delta\psi$ führt in der Schrödingerschen Gleichung zu einem Zusatzglied, so daß Gleichung (1) zu ersetzen wäre durch

$$\Delta\psi + a\left(\operatorname{grad}\psi, \operatorname{grad}\frac{1}{a}\right) + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0\,. \qquad (2)$$

Ein solches Zusatzglied zur gewöhnlichen Schrödinger-Gleichung scheint nun auch aus folgendem Grund nicht sinnlos zu sein[2]). Der Brechungsindex für Materiewellen $\sqrt{\frac{E-U}{E}}$ hängt ja vom Ort ab, das brechende Medium ist daher inhomogen. Für inhomogene Medien gilt aber die Wellengleichung nicht in der einfachen Form $\Delta\psi + k^2\psi = 0$, sondern es treten ebenfalls Zusatzglieder auf. Zum Beispiel gilt für die z-Komponente $\mathfrak{E}_z$ einer elektromagnetischen Welle im inhomogenen Medium, falls die Dielektrizitätskonstante ε nur von z abhängt, die Gleichung[3])

$$\frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}\mathfrak{E}_z + \Delta\mathfrak{E}_z + \underline{\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial z}} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\right)\mathfrak{E}_z = 0\,. \qquad (3)$$

Nehmen wir vereinfachend an, daß in Gleichung (2) die Funktion a nur von einer einzigen Koordinate abhängen soll, und zwar im räumlichen Polarkoordinatensystem nur von r, dann entspricht das Zusatzglied von Gleichung (2) genau dem unterstrichenen Glied von Gleichung (3), wenn $a = 1/\varepsilon$ gesetzt wird. Will man also mit der Analogie der Schrödingerschen Gleichung zur Wellengleichung vollen Ernst machen, so ist es notwendig, das Zusatzglied zu berücksichtigen. Es handelt sich dann um die Integration einer erweiterten Schrödinger-Gleichung, die mit der eben erwähnten Spezialisierung lautet:

$$\Delta\psi - \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0\,. \qquad (2a)$$

Man könnte daran denken, auch das weitere Zusatzglied von Gleichung (3) in die Schrödinger-Gleichung einzuführen. Da es aber an den allgemeinen Ergebnissen der Rechnung nichts ändert, begnügen wir uns mit dem aus Gleichung (2) folgenden Glied, um so mehr, als eine volle Analogie zur Differentialgleichung elektromagnetischer Wellen ja nicht gefordert werden muß; bei Wärmewellen z. B. ist im inhomogenen Medium auch nur ein Zusatzglied von der Form wie in Gleichung (2a) vorhanden.

Es stellt sich bei der Rechnung heraus, daß für $a = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{E}{E-U}$ die Gleichung (2a) nicht streng gelöst werden kann; die bekannte Polynommethode zur Berechnung der Eigenwerte

1) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **79**, 489, 1926.

2) Vgl. Cl. Schaefer, Einführung in die theoretische Physik, Bd. III, 2, S. 252.

3) K. Försterling, Lehrbuch der Optik, S. 277ff.

versagt, da die Rekursionsformeln für die Koeffizienten der Potenzreihen, die man zur Lösung ansetzen muß, nicht zweigliedrig werden. Immerhin kann man in den hier betrachteten Fällen (linearer Oszillator und Keplerbewegung) die Eigenwerte mit der W.-K.-B.-Methode bestimmen. Setzt man jedoch noch einfacher $a = 1/U$, was sich wohl auch noch rechtfertigen läßt, dann führt schon die Polynommethode in einfacher Weise zum Ziel. Welche Wahl der Funktion a die „richtige“ ist, läßt sich natürlich nicht von vornherein sagen, wenn auch $a = \frac{E}{E-U}$ in Anbetracht der Analogie zur Gleichung (3) den Vorzug verdient.

Das Ergebnis der Rechnung ist für beide Werte von a grundsätzlich dasselbe[1]: Die Eigenwerte von Gleichung (2a) sind unverträglich mit der Erfahrung über die Energieniveaus, welche nur mit den Eigenwerten von Gleichung (1) richtig beschrieben werden. Wenn es auch grundsätzlich nicht unmöglich erscheint, eine Funktion a zu finden, welche mit der bisher bekannten Erfahrung verträglich ist, so glaube ich doch nicht, daß man die Wahl dieser Funktion dann physikalisch plausibel machen kann. Man muß also den Schluß ziehen, daß die Schrödinger-Gleichung (1) zwar allein den wirklichen Sachverhalt richtig wiedergibt, daß sie aber nicht aus der Analogie zur Ausbreitung einer Welle im inhomogenen Medium ihre Begründung findet; die Analogie ist nur als heuristisches Hilfsmittel zu werten. Wenn auch dieser oder ein ähnlicher Schluß schon auf andere Weise hergeleitet werden kann, so war doch das Ergebnis der Rechnung nicht unmittelbar vorherzusehen, und außerdem schien es mir nützlich, sich von den erwähnten Konsequenzen des Zusatzgliedes einmal an der Durchrechnung einfacher Beispiele Rechenschaft abzulegen, insbesondere da man mit (im Rahmen der Wellenmechanik) elementaren Methoden auskommt.

Als Beispiele wurden der lineare Oszillator und die Keplerbewegung gewählt. Der Rotator scheidet von vornherein aus, da für diesen U nicht von r abhängt, also das Zusatzglied verschwindet[2]).

2. Wir beginnen mit der einfacheren Annahme $a = 1/U$.

a) Linearer Oszillator. Hier ist

$$U = \frac{m}{2}\,\omega_0^2 x^2.$$

Die erweiterte Schrödinger-Gleichung lautet daher

$$\psi'' + \frac{2}{x}\,\psi' + (\lambda - \alpha^2 x^2)\,\psi = 0 \qquad (4)$$

mit den üblichen Abkürzungen

$$\lambda = \frac{2m}{h^2}\,E\,, \qquad \alpha = \frac{m\omega_0}{h}\,.$$

Durch den Ansatz $\psi = e^{-\frac{\alpha}{2}x^2} \cdot v$ erhält man für v die Gleichung

$$v'' - \left(2\xi - \frac{1}{\sqrt{\alpha}\,\xi}\right)v' + \left(\frac{\lambda}{\alpha} - 1\right)v = 0\,, \qquad (5)$$

wenn man für x die Variable ξ durch $\xi = \sqrt{\alpha}\cdot x$ einführt. Gegenüber der normalen Schrödinger-Gleichung für den Oszillator ist in Gleichung (5) das Glied $\frac{1}{\sqrt{\alpha}\,\xi}\,v'$ hinzugekommen, wodurch bei $\xi = 0$ die Differentialgleichung eine Singularität erhält. Man löst eine solche Gleichung bekanntlich durch den Ansatz

$$v = \sum a_\nu \xi^{\nu+\varrho}\,.$$

Durch Einsetzen ergibt sich die charakteristische Gleichung für ϱ:

$$\varrho(\varrho - 1) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\varrho = 0\,,$$

woraus

$$\varrho_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad \varrho_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,.$$

Keine dieser beiden Lösungen kann durch Endlichkeitsforderungen ausgeschaltet werden. Für die Koeffizienten erhält man die zweigliedrige Rekursionsformel

$$a_{\nu+2}\left[(\varrho + \nu + 2)(\varrho + \nu + 1) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(\varrho + \nu + 2)\right] + a_\nu\left[-2(\varrho + \nu) + \frac{\lambda}{\alpha} - 1\right] = 0\,. \qquad (6)$$

Die wegen des Verhaltens der Funktion im Unendlichen notwendige Forderung, daß die Reihe für v abbricht, etwa mit dem Glied mit $\nu = n$, liefert die Bedingung

$$\frac{\lambda}{\alpha} - 1 = 2(\varrho + n)\,,$$

so daß mit $\varrho = 0$ die Eigenwerte λ durch dieselbe Gleichung gegeben sind wie für die normale

1) Ebenso für $a = \varepsilon$ und $a = U$, wofür die Ergebnisse am Schluß kurz zusammengestellt sind.

2) Zur Rechenmethodik vgl. A. Sommerfeld: Atombau und Spektrallinien, wellenmechanischer Erg.-Bd. bzw. 5. Aufl., Bd. 2.

Schrödinger-Gleichung. Für $\varrho = 0$ ist also

$$E = h(n + \tfrac{1}{2}) \cdot \frac{\omega_0}{2\pi} \,. \tag{7}$$

Für $\varrho = 1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ ergibt sich die wegen $\sqrt{\alpha} \gg 1$ nur geringfügige Abänderung

$$E = h\left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\frac{\omega_0}{2\pi}\,, \tag{7a}$$

wobei die Potenzreihe schon mit $\nu = n - 1$ abgebrochen wird. Für die normale Schrödinger-Gleichung des linearen Oszillators, für die $\xi = 0$ eine reguläre Stelle ist, fallen beide Lösungen, wie es sein muß, zusammen. Die Eigenfunktionen sind gegenüber denen Schrödingers gemäß Gleichung (6) nur in geringem Maße verändert. Für den linearen Oszillator bedeutet das Zusatzglied mit $a = 1/U$ keinen wesentlichen Unterschied gegen den Normalfall, das Resultat ist daher mit der Erfahrung, die Gleichung (7) bestätigt hat, im Einklang.

b) Keplerbewegung. Für das Einelektronenproblem ist $U = -\frac{Ze^2}{r}$. Gleichung (2a) lautet daher, wenn wir den radialen Bestandteil durch den Ansatz $\psi = R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$ abspalten:

$$R'' + \frac{R'}{r} + \left[\frac{2m}{h^2}\left(E + \frac{Ze^2}{r}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R = 0\,, \tag{8}$$

wo $l(l+1)$ den Eigenwert der in $\Theta(\vartheta)$ enthaltenen Kugelfunktionen darstellt. Gleichung (8) unterscheidet sich von der normalen Gleichung der Keplerbewegung durch das Glied R'/r statt $2R'/r$. — Wir beschränken uns auf den allein interessierenden Fall $E < 0$. Mit den Abkürzungen

$$A = \frac{2m}{h^2}E = -\frac{1}{r_0^2}\,, \qquad B = \frac{m}{h^2}Ze^2\,, \qquad C = -l(l+1)$$

wird aus Gleichung (8), nach Einführung der neuen Variablen $\varrho = 2r/r_0$, mittels des Ansatzes $R = e^{-\frac{\varrho}{2}} \cdot v$ die Differentialgleichung für v:

$$v'' + \left(\frac{1}{\varrho} - 1\right)v' + \left[\left(\frac{B}{\sqrt{-A}} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\varrho} + \frac{C}{\varrho^2}\right]v = 0\,. \tag{9}$$

Der übliche Ansatz $v = \Sigma a_\nu \varrho^{\nu+\gamma}$ führt zunächst wieder zur charakteristischen Gleichung für γ:

$$\gamma^2 = l(l+1)\,,$$

also

$$\gamma = \pm\sqrt{l(l+1)}\,,$$

ferner zur zweigliedrigen Rekursionsformel

$$a_{\nu+1}[(\gamma + \nu + 1)(\gamma + \nu) + (\gamma + \nu + 1) - l(l+1)] + a_\nu\left[\frac{B}{\sqrt{-A}} - \frac{1}{2} - \gamma - \nu\right] = 0\,.$$

Die Bedingung für das Abbrechen der Potenzreihe mit dem Exponenten $\nu = n_r$ (radiale Quantenzahl) lautet nun

$$\frac{B}{\sqrt{-A}} = n_r + \sqrt{l(l+1)} + \frac{1}{2}\,. \tag{10}$$

Im Normalfall ist dagegen $\gamma = l$ und

$$\frac{B}{\sqrt{-A}} = n_r + l + 1 = n \tag{10a}$$

(n = Hauptquantenzahl). Man erkennt, daß im Fall der Keplerbewegung die Wahl $a = 1/U$ zu einem Ergebnis führt, das mit der Erfahrung unverträglich ist, da bekanntlich die Terme der Spektrallinien im Serienspektrum nur durch Gleichung (10a) richtig wiedergegeben werden, und zwar mit sehr großer Genauigkeit, so daß die Annahme $a = 1/U$ verworfen werden muß[1]). Eher hätte man Abweichungen im Fall des Oszillators zulassen können, da die empirische Bestimmung der Terme wegen der notwendigen, aber unsicheren, Korrektion bezüglich der anharmonischen Glieder wesentlich ungenauer ist als die Auswertung der Serienlinien zur Berechnung der Balmerterme.

3. Wir setzen nun $a = \frac{E}{E - U}$. Wie oben erwähnt wurde, ist diese Wahl von a aus Gründen der Analogie zur Wellengleichung im inhomogenen Medium der zunächst betrachteten vorzuziehen.

1) Nur für sehr große l geht Gleichung (10) in (10a) über.

a) Linearer Oszillator. Die Differentialgleichung lautet nun:

$$\psi'' - \frac{m\omega_0^2 x}{E - \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2}\psi' + \frac{2m}{h^2}\left(E - \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2\right)\psi = 0\,. \tag{11}$$

Behandelt man Gleichung (11) nach demselben Schema wie im Abschnitt 2, also nach der Polynommethode, so erhält man Rekursionsformeln, die nicht mehr zweigliedrig sind. Damit fällt die Möglichkeit fort, die Eigenwerte aus der Bedingung für das Abbrechen der Potenzreihen zu erhalten. Man kann hier aber die W.-K.-B.-Methode mit Vorteil benutzen, insbesondere da es ja weniger auf die Eigenfunktionen als die Eigenwerte ankommt, die in unseren Beispielen genauer bestimmt werden können als die Eigenfunktionen.

Wir setzen also an:

$$\psi = e^{\frac{i}{h}\int y\,dx}\,. \tag{12}$$

Für y folgt durch Einsetzen in Gleichung (11) die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{h}{i}y' = 2m\left(E - \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2\right) + \frac{h}{i}\,\frac{m\omega_0^2 x}{E - \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2}\,y - y^2\,. \tag{13}$$

Setzt man für y die Reihe

$$y = y_0 + \frac{h}{i}y_1 + \left(\frac{h}{i}\right)^2 y_2 + \cdots, \tag{14}$$

so erhält man nach bekannter Methode die sukzessiven Näherungen

$$y_0^2 = 2m\left(E - \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2\right),$$

$$y_1 = -\frac{y_0'}{2y_0} + \frac{\frac{m}{2}\omega_0^2 x}{E - \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2} \quad \text{usw.}$$

Die Quantenbedingung lautet

$$\oint y\,dx = \oint y_0\,dx + \frac{h}{i}\oint y_1\,dx + \cdots = n\cdot h\,. \tag{15}$$

Die Integrale sind in der komplexen Ebene auf einem Weg zu erstrecken, der die Umkehrpunkte der klassischen Bahn umschließt. Nun ist (vgl. Sommerfeld, Erg.-Bd., S. 162ff.)

$$\oint y_0\,dx = \frac{2\pi}{\omega_0}E\,;$$

der erste Teil des Integrals über y_1 hat den Wert

$$-\oint\frac{y_0'}{2y_0} = -\pi i\,;$$

der zweite Teil des Integranden dieses Integrals kann durch Partialbruchzerlegung in der Form geschrieben werden

$$\frac{\frac{m}{2}\omega_0^2 x\,dx}{E - \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 + \sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2E}}\cdot x} - \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2E}}\cdot x}\right] d\sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2E}}\cdot x\,,$$

so daß für den zweiten Teil des Integrals sofort folgt (Verlegung des Integrationswegs ins Unendliche):

$$-\oint\frac{\frac{m}{2}\omega_0^2 x\,dx}{E - \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2} = 2\pi i\,.$$

Setzt man die Einzelintegrale in Gleichung (15) ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} &E\cdot\frac{2\pi}{\omega_0} - \frac{h}{2} - h = nh \\ \text{oder}\quad &E = \left(n + \frac{3}{2}\right)\frac{h}{2\pi}\omega_0\,. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Die Beiträge der höheren Glieder verschwinden, so daß schon mit dieser Näherung der Eigenwert richtig bestimmt ist. Die Eigenfunktionen interessieren uns in diesem Zusammenhang nicht. Man erkennt, daß zwar die Energiedifferenzen, also die Ausstrahlungsfrequenzen, richtig herauskommen, daß aber die Nullpunktsenergie um den Betrag $\frac{h}{2\pi}\omega_0$ zu groß ist. Da der Wert der Nullpunktsenergie des Oszillators mit $\frac{1}{2}\frac{h\omega_0}{2\pi}$ durch die Erfahrung bei Bandenspektren und bei der spezifischen Wärme bestätigt ist, muß für $a = \frac{E}{E-U}$ schon im Fall des Oszillators ein Widerspruch mit der Erfahrung festgestellt werden.

b) Keplerbewegung. Die Differentialgleichung der Keplerbewegung lautet für $a = \frac{E}{E-U}$

$$R'' + \left(\frac{2}{r} - \frac{B}{\frac{A}{2}r^2 + Br}\right)R' + \left[\frac{1}{h^2}\left(A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}\right) + \frac{l+1}{r^2}\right]R = 0 \qquad (17)$$

mit den Abkürzungen (gegenüber Abschnitt 2b etwas abgeändert)

$$A = 2mE\,, \quad B = mZe^2\,, \quad C = -h^2(l+1)^2 \quad \text{oder} \quad -l(l+1) = \frac{C}{h^2} + l + 1\,.$$

Wie im Abschnitt 3a erhält man durch den Ansatz Gleichung (12) für y die Gleichung

$$\frac{h}{i}\left[y' + \left(\frac{2}{r} - \frac{B}{\frac{A}{2}r^2 + Br}\right)y + \frac{\sqrt{C}}{r^2}\right] = P^2 - y^2. \qquad (18)$$

Dabei ist $P = \sqrt{A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}}$ gesetzt. Die Reihe Gleichung (14) liefert die Näherungen $y_0^2 = P^2$.

$$y_1 = -\frac{1}{2y_0}\left[y_0' + \frac{2y_0}{r} + \frac{\sqrt{C}}{r^2} - \frac{B}{\frac{A}{2}r^2 + Br}y_0\right].$$

Zur Aufstellung der Quantenbedingung sind wieder die einzelnen Integrale zu berechnen. Es ist

$$\oint y_0 dr = 2\pi i\left(\frac{B}{\sqrt{A}} - \sqrt{C}\right)$$

und, da die ersten drei Glieder von $\oint y_1 dr$ nach Sommerfeld (l. c.) verschwinden,

$$-\oint y_1 dr = -\frac{1}{2}\oint\frac{B}{\frac{A}{2}r^2 + Br}dr = \oint\frac{d\sqrt{\frac{A}{2}+\frac{B}{r}}}{\sqrt{\frac{A}{2}+\frac{B}{r}}} = 2\pi i\,,$$

da die Nullstelle der Wurzel vom Integrationsweg eingeschlossen wird.

Um die höheren Glieder brauchen wir uns wieder nicht zu kümmern. Als Quantenbedingung erhält man demnach

$$2\pi i\left(\frac{B}{\sqrt{-A}} - \sqrt{C}\right) - h = n_r \cdot h\,,$$

woraus

$$2\pi\frac{B}{\sqrt{-A}} = (n_r + l + 2)h = n \cdot h\,. \qquad (19)$$

Das bedeutet, daß zwar die gleiche Quantenbedingung erhalten wird wie mit der normalen Schrödingerschen Differentialgleichung, daß jedoch die Zählung der Hauptquantenzahl n falsch

wird; denn diese muß mit $n = 1$ beginnen, um der Erfahrung gerecht zu werden. Wenn also auch Gleichung (19) keinen grundsätzlichen Widerspruch zur Erfahrung enthält, so ist doch die zu Gleichung (19) führende Setzung von a als nicht zweckmäßig anzusehen, ganz abgesehen davon, daß ja für den Oszillator ein grundsätzlich falsches Ergebnis erhalten wurde. Man muß daher $a = 1$, d. h. die ursprüngliche Schrödinger-Gleichung (1) als allein möglichen Ausdruck der Tatsachen ansehen.

4. Anhangsweise seien die Ergebnisse für $a = U$ und $a = \varepsilon$ mitgeteilt:

a) $a = U$: Für den Oszillator ändert sich nur das Vorzeichen aller Glieder mit $\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$. Im Fall der Keplerbewegung ist in Gleichung (9) $\frac{1}{\varrho} - 1$ durch $\frac{3}{\varrho} - 1$, $\frac{B}{\sqrt{-A}} - \frac{1}{2}$ durch $\frac{B}{\sqrt{-A}} - \frac{3}{2}$ zu ersetzen. Dann wird

$$\gamma = \sqrt{l(l+1)+1}$$

und

$$\frac{B}{\sqrt{-A}} = n_r + \sqrt{l(l+1)+1} + \frac{5}{2}.$$

b) $a = \varepsilon$: Für den Oszillator gilt

$$E = \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{h}{2\pi}\,\omega_0,$$

die Nullpunktsenergie wird negativ! Die Quantenbedingung der Keplerbewegung lautet

$$\frac{2\pi B}{\sqrt{-A}} = (n_r + l)\,h,$$

also wie in der Bohrschen Theorie, in der durch willkürliche Auswahlverbote die Werte $n_r = l = 0$ ausgeschlossen werden mußten.

Zusammenfassung

Im Anschluß an eine Bemerkung Schrödingers wird ein Zusatzglied zur Schrödingerschen Differentialgleichung hinzugefügt, das der Analogie zur Ausbreitung von Wellen im inhomogenen Medium Rechnung trägt. Die Durchrechnung von zwei Beispielen (linearer Oszillator und Keplerbewegung) lehrt, daß die so erweiterte Schrödinger-Gleichung nicht mit den Beobachtungen verträglich ist.

Die vorliegenden Überlegungen wurden im Max-Planck-Institut, Berlin-Dahlem, begonnen. Herrn Prof. Dr. Dr. h. c. Debye möchte ich auch an dieser Stelle herzlich für die Gastfreundschaft danken, mit der er mich in seinem Institut aufgenommen hat.

Graz, Physikalisches Institut der Universität, November 1939.

(Eingegangen 1. Dezember 1939)

BESPRECHUNGEN

Sämtliche in diesem Heft besprochenen oder vom Verlag angezeigten Bücher sind in allen deutschen Buchhandlungen zu erhalten

Ludwig Bieberbach, Carl Friedrich Gauß, ein deutsches Gelehrtenleben. 179 S. Mit einer Bildtafel. Berlin 1939. Keil-Verlag. Geb. RM 4.—.

Vom Leben des größten deutschen Mathematikers ist der Allgemeinheit nur wenig bekannt. Auf die allgemeine Kulturgeschichte, in deren Zusammenhang Gestalten wie Kepler und Leibniz so interessant sind, hat Gauß kaum direkt eingewirkt. Um seine Größe zu erkennen, muß man nicht seine ferneren Auswirkungen, sondern ihn, den Mann selbst, betrachten. Das vorliegende kleine Buch des Berliner Mathematikers ist ein guter Wegweiser dazu. Zwar muß auf eine genaue Schilderung der mathematischen Leistungen von Gauß naturgemäß verzichtet werden; doch vermittelt das Buch von ihnen wenigstens eine Vorstellung, zum Teil durch die wörtliche Wiedergabe längerer Texte von Gauß' eigener Hand. Ähnlich ist im biographischen Teil verfahren; die langen Auszüge aus Gauß' Briefen stellen den größten Vorzug und den interessantesten Teil des Buches dar. Wir lernen hier nicht nur den Forscher kennen und die „unnennbare Satisfaktion", die ihm neue Erkenntnisse gewähren, sondern den Freund, den Gatten und Vater, den Lehrer und den stets zu praktisch nützlichen Arbeiten bereiten Staatsdiener. Und noch im persönlichsten Wort, mag es die glücklichsten menschlichen Empfindungen oder Leid und den Druck eingeschränkter Verhältnisse aussprechen, fühlen wir die große Gelassenheit des Geistes, die diesem dem reinen Bemühen um die Wahrheit gewidmeten Leben entspricht.

Das bekannte Altersbild schmückt das angenehm ausgestattete Buch.

C. F. v. Weizsäcker

Nachrichten

Gestorben: Der Regierungsrat an der Physikalisch-Technischen-Reichsanstalt in Berlin Dr. Sigmund Erk (im Felde), der Gründer der Brautechnischen Versuchsanstalt in Weihenstephan Geh. Hofrat Professor Dr. Hans Vogel in München, der frühere Generaldirektor der Firma E. de Haën in Seelze Kommerzienrat Dr. Wilhelm de Haën, der frühere Vorstand der Abteilung Physik an der Chemisch-Technischen Reichsanstalt in Berlin, Oberregierungsrat i. R. Dr. Franz Ritter.

Verantwortlicher Schriftleiter: Professor Dr. Dr. h. c. P. Debye, Berlin. — Für den Anzeigenteil verantwortlich: A. Plohmann, Leipzig. — Verlag S. Hirzel, Leipzig C 1, Königstr. 2. — Druck: Bibliographisches Institut AG., Leipzig. — Zur Zeit gilt Anzeigenpreisliste 3. — Printed in Germany.